Μάθημα 1ο   ΕΦΜ4   Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε   05/02/2018

I. Χώροι Hilbert

V = διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.

$u, v \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ $\lambda u + m v \in V$

$\dim V = n$ $\exists \{u_i\}_{i=1}^{n}, u_i \in V$ γραμμικά ανεξάρτητα, παράγουν τον χώρο } βάση του χώρου

$\forall u \in V$ $\exists \lambda_i$ (μονοσήμαντα ορισμένα) τω $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i$

εσωτερικό γινόμενο

$u, v \in V$ $(u, v) \in \mathbb{R}$

Εσωτερικό γινόμενο Ιδιότητες

(i) $(u,u) \geq 0$, αν $(u,u) = 0 \implies u = 0$

(ii) $(u,v) = (v,u)$

(iii) $(\lambda u + \mu v, w) = \lambda(u,w) + \mu(v,w)$ $\forall u,v,w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Παράδειγμα: Έστω ο $\mathbb{R}^d$ και $(u,v) = \sum_{i=1}^{d} u_i \cdot v_i$ (Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο)

$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_d \end{pmatrix}$ Μπορώ να πάρω την $\|u\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} u_i^2}$

Ορισμός: $(u,v) = 0 \iff u, v$ "Ορθογώνια"

$u \in V$ ορίζω $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$

Παρατήρηση: Ανισότητα Cauchy-Schwarz $|(u,v)| \leq \|u\| \cdot \|v\|$ $\forall u, v \in V$

Ιδιότητες Νόρμας:

(i) $\|u\| \geq 0$, $\|u\| = 0 \iff u = 0$

(ii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \cdot \|u\|$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V$ (ομογενής)

(iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ $\forall u, v \in V$ (Τριγωνική ανισότητα)

Απόδειξη της (iii) για την νόρμα που επάγεται από εσωτερικό γινόμενο.

$\|u+v\|^2 = (u+v, u+v) = (u,u) + (u,v) + (v,u) + (v,v) = \|u\|^2 + 2\cdot(u,v) + \|v\|^2$
$\leq \|u\|^2 + 2\cdot\|u\|\cdot\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2$

• Αν u,v ορθογώνια $\Longrightarrow \|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

Έστω $\rho(u,v) = \|u-v\|$ (Η μετρική που επάγεται από την νόρμα)
μπορώ να ορίσω μπάλες $\|u-u_0\| \leq \rho$ (κλειστή μπάλα)
$u_n \in V$ (ακολουθία διανυσμάτων) $u_n \longrightarrow u \in V$, $n \longrightarrow \infty$ $u = \lim u_n$, $n \to \infty$
$u_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{op}} u \iff \|u_n - u\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

M πυκνό ωςπρος την $\|\cdot\|$ στο V, $M \subset V$
$\Updownarrow$
$\forall u \in V \ \exists u_n \in M$ τω. $u_n \xrightarrow{n\to\infty} u$

Ορισμός: Η $\{u_n\}$, $u_n \in V$, και $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$
λέγεται Cauchy (βασική) αν $\|u_n - u_m\| \longrightarrow 0$, $n,m \longrightarrow \infty$
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : m,n \geq N \ \|u_n - u_m\| < \varepsilon$

• Αν $\exists u : u_n \to u$ (δηλαδή η $\{u_n\}$ συγκλίνει), τότε είναι Cauchy.
Απόδειξη: $\|u_n - u_m\| = \|u_n - u_m + u - u\| \leq \|u_n - u\| + \|u_m - u\| \longrightarrow 0$

Ορισμός: $(V, \|\cdot\|)$ λέγεται πλήρης, αν κάθε ακολουθία Cauchy στο χώρο συγκλίνει.
Δηλαδή αν $\{u_n\}$ Cauchy, $\exists u \in V$ τω $u_n \longrightarrow u$

Ορισμός: $(V, (\cdot,\cdot))$ χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Αν V πλήρης τότε λέγεται χώρος Hilbert.

Παραδείγματα:

① Ο $\mathbb{R}^d$ είναι πλήρης με το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο
$\{u_n\}$ ακολουθία Cauchy στο $\mathbb{R}^d$, $u_n = (u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \ldots, u_n^{(d)})^T$
$\|u_n - u_m\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} (u_n^{(i)} - u_m^{(i)})^2} \longrightarrow 0$, $m,n \longrightarrow \infty$

ΕΦΜ4 Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 05/02/2018

$\forall i,\ 1\le i\le d \quad |u_n^{(i)}-u_m^{(i)}|\longrightarrow 0, \quad m,n\to\infty$

$\forall i$ $\{u_n^{(i)}\}$ είναι ακολουθία Cauchy πραγματικών αριθμών.

Άρα $\exists\, u^{(i)}\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $u_n^{(i)}\to u^{(i)},\ n\to\infty$

Ορίζω $u=(u^{(1)},u^{(2)},\dots,u^{(d)})^T$ τότε $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$ γιατί $\sum_{i=1}^{d}|u_n^{(i)}-u^{(i)}|^2\longrightarrow 0 \Leftrightarrow \|u_n-u\|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

② $u\in\ell^2$, $u=(u_1,u_2,\dots)$, $u_i\in\mathbb{R}$ $\sum_{i=1}^{\infty}(u_i)^2<\infty$ (τότε $u\in\ell^2$)

Ορίζω εσωτερικό γινόμενο $(u,v)=\sum_{i=1}^{\infty}u_i v_i$

$\|u\|^2=(u,u)$, $(\ell^2,\|\cdot\|)$ πλήρης

③ $V=C[\alpha,\beta]=C[\bar{I}]$ $\quad (\alpha,\beta)=I \quad f\in C[\alpha,\beta] \overset{\text{ορ}}{\Leftrightarrow} f:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{R}$

V διανυσματικός χώρος $(\lambda f+\mu g)(x)=\lambda f(x)+\mu g(x)$

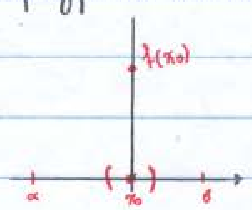
$f,g\in V$, ορίζω εσωτερικό γινόμενο $(f,g)=\int_\alpha^\beta f(x)g(x)\,dx=\int_\alpha^\beta fg$

Ελέγχω τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου αν ισχύουν

(i) $(f,f)=\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx\ge 0$

$(f,f)=0 \Rightarrow \int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx=0 \overset{?}{\Rightarrow} f=0$ Δηλαδή είναι $f(x)=0\ \forall x\in[\alpha,\beta]$;

Πράγματι: Έστω $x_0\in(\alpha,\beta)$ και $f(x_0)\neq 0$ π.χ. $f(x_0)>0$



$\exists\,(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon): f(x)>0\ \forall x\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$

$0=\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx\ge\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}f^2(x)\,dx>0$ Άτοπο. Άρα $f(x)=0\ \forall x\in[\alpha,\beta]$

(ii) $(f,g)=(g,f)$

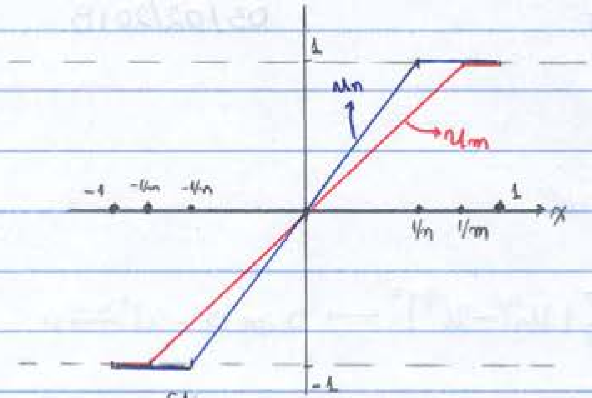
(iii) $(\lambda f+\mu g,h)=\lambda(f,h)+\mu(g,h)$

Από αυτό το εσωτερικό γινόμενο ⟶ νόρμα $\|f\|=\sqrt{\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx}$, η "$L_2$ νόρμα" στο $C[\alpha,\beta]$.

- Ως προς την νόρμα L_2 ο $C[\alpha,\beta]$ δεν είναι πλήρης $\Rightarrow$ $C[\alpha,\beta]$ όχι χώρος Hilbert
- Ο $C[\alpha,\beta]$ είναι πλήρης ως προς την νόρμα $\|f\|_\infty=\max_{\alpha\le x\le\beta}|f(x)|$

Για να δείξω ότι δεν είναι πλήρης αρκεί να πάρω μια βασική ακολουθία στον $C[\alpha,\beta]$ και να δείξω ότι δεν συγκλίνει.

Έστω $C[-1,1]$ και
$$u_n(x)=\begin{cases}-1, & x\le -1/n\\ nx, & -1/n<x<1/n\\ 1, & x\ge 1/n\end{cases}$$



$u_n, u_m \in C[-1,1]$ και έστω $n > m$

$\|u_n - u_m\|^2 = \int_{-1}^{1} (u_n(x) - u_m(x))^2 \, dx$

Μπορώ το $\int_{-1}^{1} (u_n(x) - u_m(x))^2 dx$ να το γράψω ως εξής:

$$\int_0^{1/n} (n \cdot x - m x)^2 dx + \int_{1/m}^{1/m} (1 - m x)^2 dx + \int_{1/m}^{1} \cancel{(1-1)}^{0} dx + \int_{-1/n}^{0} \dots + \int_{-1/m}^{-1/n} \dots + \int_{-1}^{-1/m} \leq \int_0^{1/n} 1 + \int_{1/m}^{1/n} 1 + \dots \leq \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right) \to 0$$

Μάθημα 2ο ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 06/02/2018

$V = C(\bar{I})$, $I=(\alpha,\beta)$, $f,g\in V$. $(f,g)=\int_\alpha^\beta f(x)\cdot g(x)\,dx$, $\|f\|^2=(f,f)=\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx$.

Είναι ο $(V,(\cdot,\cdot))$ πλήρης;

Πήραμε $(\alpha,\beta)=(-1,1)$ και $u_n(x)=\begin{cases}1, & 1/n\le x\le 1\\ n\cdot x, & -1/n\le x\le 1/n\\ -1, & -1\le x\le -1/n\end{cases}$

Η $\{u_n\}$ είναι Cauchy στον $(V,(\cdot,\cdot))$. $\|u_n-u_m\|\longrightarrow 0$ $n,m\to\infty$

Ερώτημα: Υπάρχει $f\in C[-1,1]$ τέτοια ώστε $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} f \Leftrightarrow \|u_n-f\|\longrightarrow 0, n\to\infty$;

(Αφήνεται ως Άσκηση)

Υπόδειξη: Έστω $\exists f\in C(\bar{I})$ τότε $\underset{\substack{\downarrow n\to\infty \\ 0}}{\|u_n-f\|^2} = \underbrace{\int_0^{1/n}(nx-f(x))^2dx}_{\substack{\to 0,\ n\to\infty \\ (nx-f(x))^2 \text{ φραγμένο}}}+\int_{1/n}^1(1-f(x))^2dx+\int_{-1/n}^0\dots+\int_{-1}^{-1/n}\dots$

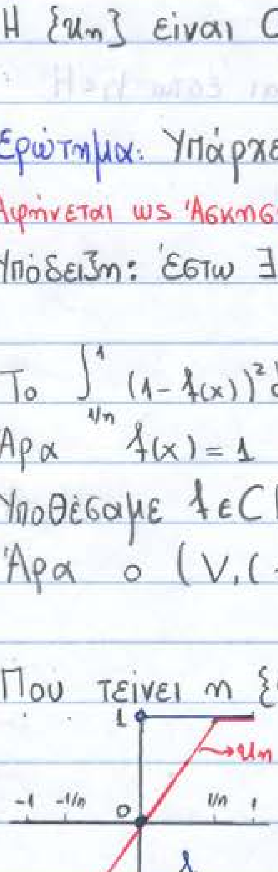
Το $\int_{1/n}^1 (1-f(x))^2dx \longrightarrow \int_0^1(1-f(x))^2dx$ Αυτό προκύπτει ότι πρέπει να κάνει 0.

Άρα $f(x)=1$ όταν $0\le x\le 1$ και όμοια $f(x)=-1$ όταν $-1\le x\le 0$. Η f ασυνεχής στο 0.

Υποθέσαμε $f\in C[-1,1]$ Άτοπο. Άρα $\nexists f$ συνεχής τέτοια ώστε $u_n\xrightarrow{\|\cdot\|} f$

Άρα ο $(V,(\cdot,\cdot))$ δεν είναι πλήρης.

Πού τείνει η $\{u_n\}$ $n\to\infty$, με την $\|\cdot\|$; Μήπως στην $f=\begin{cases}1, & 0< x\le 1\\ 0, & x=0\\ -1, & -1\le x<0\end{cases}$;



$\|u_n-f\|^2=\int_0^{1/n}(nx-1)^2dx+\int_{1/n}^1\overset{0}{\cancel{(1-1)}}^2dx+\int_{-1/n}^0(nx+1)^2dx+\int_{-1}^{-1/n}\cancel{(-1+1)}^2dx$

παρατηρώ ότι $|n\cdot x-1|\le 1$ Άρα $\int_0^{1/n}(nx-1)^2dx\le\int_0^{1/n}1\,dx\longrightarrow 0$

Το όριο αυτό δεν είναι μοναδικό π.χ. αν $f(x)=\begin{cases}1, & x\ge 0\\ -1, & x<0\end{cases}$

προφανώς $\|u_n-f\|\longrightarrow 0$

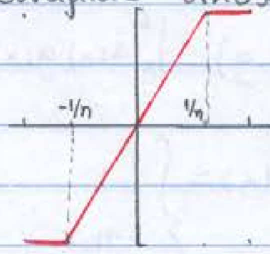
Οποιοσδήποτε χώρος V με εσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$ $(\Rightarrow \|\cdot\|=(\cdot,\cdot)^{1/2})$ (γενικότερα σε οποιοσδήποτε διανυσματικό χώρο με νόρμα ή μετρικό χώρο) μπορεί να "πληρωθεί" με την έννοια ότι μπορεί να ταυτισθεί (μέσω απεικόνισης 1-1, επί και ισομετρική) με έναν διανυσματικό χώρο M που είναι πυκνός υπόχωρος ενός χώρου Hilbert H. Γράφουμε: $\bar{V}=H$ ή $\bar{V}^{\|\cdot\|}=H$

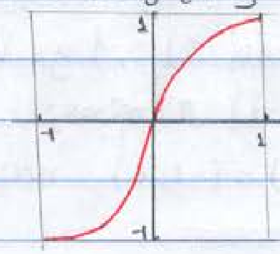
(Ο H είναι η πλήρωση του V)

Ο H είναι το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ακολουθιών Cauchy $\{u_n\}$ του V

$\{u_n\} \sim \{v_n\} \iff \lim_{n\to\infty} |u_n - v_n| = 0$

$\overline{C(\bar{I})}^{\|\cdot\|} = L^2(I)$





Θεώρημα Προβολής

Έστω χώρος Hilbert H $(\cdot,\cdot) \leftarrow \|\cdot\|$ και έστω M κλειστός υπόχωρος του H και έστω $h \in H$

τότε υπάρχει μοναδικό $g \in M$:

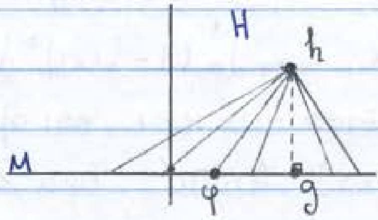
(i) $\|h-g\| = \inf_{\varphi\in M} \|h-\varphi\|$ (το g λέγεται βέλτιστη προσέγγιση του h ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$)

επιπλέον το g είναι η βέλτιστη προσέγγιση του h αν και μόνο αν:

(ii) $(h-g, \varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in M$ "Κανονικές εξισώσεις"

Η g είναι η ορθή προβολή του h στον M

(Μ υπόχωρος ⇒ γραμμικοί συνδυασμοί στοιχείων του M είναι στοιχεία του M) (M κλειστός ⇒ Αν $u_n \in M$ και $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$, $u \in M$)



Απόδειξη:

Έστω $h \notin M$ (αν $h \in M \Rightarrow g = h$)

(i) Έστω $\varphi_n \in M$ τέτοια ώστε $\|h-\varphi_n\| \longrightarrow \inf_{\varphi\in M} \|h-\varphi\| = \delta > 0$

(α) Η $\{\varphi_n\}$ είναι Cauchy

$\|\varphi_n - \varphi_m\| \longrightarrow 0 \quad n,m \longrightarrow \infty$

Κανόνας Παραλληλογράμμου: f_1, f_2 σε χώρο με εσωτ. γινόμενο: $\|f_1+f_2\|^2 + \|f_1-f_2\|^2 = 2\|f_1\|^2 + 2\|f_2\|^2$

Απόδειξη: $\|f_1+f_2\|^2 + \|f_1-f_2\|^2 = (f_1+f_2, f_1+f_2) + (f_1-f_2, f_1-f_2) = \|f_1\|^2 + 2(f_1,f_2) + \|f_2\|^2 + \|f_1\|^2 - 2(f_1,f_2) + \|f_2\|^2 = 2\|f_1\|^2 + 2\|f_2\|^2$

$f_1 = h - \varphi_n$ τότε $f_1 - f_2 = -\varphi_n + \varphi_m$

$f_2 = h - \varphi_m$ $\quad f_1 + f_2 = 2h - (\varphi_n + \varphi_m)$

$$\|\varphi_n-\varphi_m\|^2 = 2\|h-\varphi_n\|^2 + 2\|h-\varphi_m\|^2 - \|2h-(\varphi_n+\varphi_m)\|^2 = 2\underbrace{\|h-\varphi_n\|^2}_{\downarrow n\to\infty \; 2\delta^2} + 2\underbrace{\|h-\varphi_m\|^2}_{\downarrow m\to\infty \; 2\delta^2} - 4\underbrace{\left\|h-\frac{\varphi_n+\varphi_m}{2}\right\|^2}_{\downarrow \; -4\delta^2}$$

$\Rightarrow \lim_{n,m\to\infty} \|\varphi_n - \varphi_m\| = 0$ Άρα $\{\varphi_n\}$ Cauchy

Θα δείξω ότι $h - \frac{\varphi_n+\varphi_m}{2} \longrightarrow \delta$

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 06/02/2018

$$h-\frac{\varphi_n+\varphi_m}{2} = \frac{h}{2}-\frac{\varphi_n}{2}+\frac{h}{2}-\frac{\varphi_m}{2}$$

$$\delta = \inf_{x\in M}\|h-x\| \le \left\|h-\frac{\varphi_n+\varphi_m}{2}\right\| \le \frac{1}{2}\|h-\varphi_n\|+\frac{1}{2}\|h-\varphi_m\| = \delta/2+\delta/2=\delta$$

$$\overline{\lim_{n,m\to\infty}}\left\|h-\frac{\varphi_n+\varphi_m}{2}\right\| \le 1/2\,\delta + 1/2\,\delta = \delta$$

$$\overline{\lim} = \underline{\lim} = \lim$$

$$\underline{\lim_{n,m\to\infty}}\left\|h-\frac{\varphi_n+\varphi_m}{2}\right\| \ge \delta$$

(β) Ύπαρξη του g (τέτοιο ώστε $\|h-g\| = \inf_{\varphi\in M}\|h-\varphi\|$

Επειδή H πλήρης $\exists\, g\in H$: $\varphi_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ Αλλά M κλειστό $\Rightarrow g\in M$.

$$\underbrace{\|h-\varphi_n\|}_{\inf_{\varphi\in M}\|f-\varphi\|} \longrightarrow \|h-g\|$$

(γ) Μοναδικότητα του g

Έστω $\exists\, g_1, g_2\in M$, $g_1\neq g_2$ τέτοια ώστε $\|h-g_1\| = \delta = \inf_{\varphi\in M}\|h-\varphi\|$ και $\|h-g_2\| = \delta = \inf_{\varphi\in M}\|h-\varphi\|$

τότε και το $(g_1+g_2)/2$ είναι βέλτιστη προσέγγιση

$$\left\|h-\frac{g_1+g_2}{2}\right\| = \frac{1}{2}\|h-g_1\|+\frac{1}{2}\|h-g_2\|$$

$$\Updownarrow$$

$$\left\|\frac{h-g_1}{2}+\frac{h-g_2}{2}\right\| = \left\|\frac{h-g_1}{2}\right\| + \left\|\frac{h-g_2}{2}\right\|$$

Αντιθέτω $\frac{h-g_1}{2}=x$, $\frac{h-g_2}{2}=y$

τότε έχω: $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$

Αφήνεται ως Άσκηση $\rightarrow$ $\|x+y\| = \|x\|+\|y\| \Longleftrightarrow \exists\, \lambda\ge 0:\ x=\lambda\cdot y$ ή $\exists\, \mu\ge 0: y=\mu x$

Άρα $\frac{h-g_1}{2} = \lambda\cdot\frac{h-g_2}{2} \Rightarrow (1-\lambda)h = g_1-\lambda g_2$ Διακρίνω 2 περιπτώσεις:

(1) $\lambda\neq 1$ τότε έχουμε άτοπο γιατί $(1-\lambda)h\notin M$ και $g_1-\lambda g_2\in M$, άρα δεν μπορούν να είναι ίσα

(2) $\lambda=1$ τότε $0=g_1-g_2 \Rightarrow g_1=g_2$. Άρα g μοναδική βέλτιστη προσέγγιση.

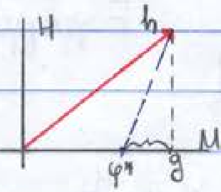
Μάθημα 3ο   ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε   12/02/2018

(Συνέχεια απόδειξης Θεωρήματος Προβολής)

(ii) ($\Rightarrow$) δεδομένου $h \in \mathcal{H}$, έστω $g \in M$ τέτοιο ώστε $(h-g,\varphi)=0 \ \forall \varphi \in M \Rightarrow$ το g είναι η βέλτιστη προσέγγιση.

Από υπόθεση

$$\|h-g\|^2 = (h-g,h-g) = (h-g,h) - \cancel{(h-g,g)}^{\,0} = (h-g,h) - (h-g,\varphi), \ \varphi \in M$$
$$= (h-g,h-\varphi) \Rightarrow \|h-g\|^2 = (h-g,h-\varphi) \ \ \forall \varphi \in M \Rightarrow \|h-g\|^2 \le \|h-g\|\cdot\|h-\varphi\| \Leftrightarrow$$
$$\|h-g\| \le \|h-\varphi\| \ \ \forall \varphi \in M \text{ τότε } \inf_{\varphi \in M}\|h-\varphi\| \le \|h-g\| \le \inf_{\varphi \in M}\|h-\varphi\| \Leftrightarrow \|h-g\| = \inf_{\varphi\in M}\|h-\varphi\|$$



($\Leftarrow$) g βέλτιστη προσέγγιση $\Rightarrow (h-g,\varphi)=0 \ \ \forall \varphi \in M$

Έστω ότι $\exists\ \varphi^* \neq 0,\ \varphi^* \in M : (h-g,\varphi^*) \neq 0$

Ορίζω $g^* = g + \dfrac{(h-g,\varphi^*)}{\|\varphi^*\|^2}\cdot\varphi^* \in M$

Θα δείξω ότι g^* είναι η βέλτιστη προσέγγιση και θα οδηγηθώ σε άτοπο.

$$\|h-g^*\|^2 = \|\underbrace{h-g}_{\alpha} - \underbrace{\frac{(h-g,\varphi^*)}{\|\varphi^*\|^2}\cdot\varphi^*}_{\beta}\|^2$$

ξέρω ότι $\|\alpha-\beta\|^2 = (\alpha-\beta,\alpha-\beta) = \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2 - 2(\alpha,\beta)$ (*)

Από την (*) $\Rightarrow \|h-g^*\|^2 = \|h-g\|^2 + \dfrac{(h-g,\varphi^*)^2}{\|\varphi^*\|^{\cancel{4}\,2}}\cancel{\|\varphi^*\|^2} - 2\Big(h-g, \underbrace{\dfrac{(h-g,\varphi^*)}{\|\varphi^*\|^2}}_{\text{βαθμωτό}}\varphi^*\Big) \Leftrightarrow$

$$\|h-g^*\|^2 = \|h-g\|^2 + \frac{(h-g,\varphi^*)^2}{\|\varphi^*\|^2} - 2\cdot\frac{(h-g,\varphi^*)}{\|\varphi^*\|^2}\cdot(h-g,\varphi^*) \Leftrightarrow$$

$$\|h-g^*\|^2 = \|h-g\|^2 - \frac{(h-g,\varphi^*)^2}{\|\varphi^*\|^2}$$

Συμπέρασμα: $\|h-g^*\|^2 < \|h-g\|^2$ Άτοπο

Έστω $\dim M < \infty$, M κλειστό, $\{\varphi_i\}_{i=1}^{d}$ βάση του M

$h \in \mathcal{H}$, βρες $g \in M$ τέτοιο ώστε: $(h-g,\varphi)=0 \ \ \forall \varphi \in M \Rightarrow$

$(g,\varphi) = (h,\varphi) \ \ \forall \varphi \in M \Leftrightarrow (g,\varphi_i) = (h,\varphi_i) \ \ 1 \le i \le d$

ψάχνω $g \in M$: $g = \sum_{i=1}^{d} c_i \cdot \varphi_i$ (ψάχνω $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_d \end{bmatrix}$)

Άρα $\Big(\sum_{k=1}^{d} c_k \cdot \varphi_k, \varphi_i\Big) = (h,\varphi_i) \ \ 1 \le i \le d \Rightarrow \sum_{k=1}^{d} c_k \overbrace{(\varphi_k,\varphi_i)}^{G_{ik}} = (h,\varphi_i) \ \ 1 \le i \le d$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{d} G_{ik}\cdot c_k = (h,\varphi_i)$

G πίνακας Gram ή πίνακας μάζας
$G_{d\times d}$, $G_{ik} = (\varphi_k,\varphi_i)$, $G_{ik} = G_{ki}$, G συμμετρικός

$G\cdot c = H$, $H_i = \begin{pmatrix} h_i\varphi_i \\ \vdots \end{pmatrix}$

①

Παρατήρηση: G θετικά ορισμένος, $x \in \mathbb{R}^d$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$

$$x^T \cdot G \cdot x = \sum_{i,j=1}^{d} x_i G_{ij} x_j = \sum_{i,j=1}^{d} x_i (\varphi_i, \varphi_j) x_j = \sum_{i,j=1}^{d} (x_i \varphi_i, x_j \varphi_j) = \left(\sum_{i=1}^{d} x_i \varphi_i, \sum_{j=1}^{d} x_j \varphi_j \right) \Leftrightarrow$$

$$x^T \cdot G x = \left\| \sum_{i=1}^{d} x_i \varphi_i \right\|^2 \geq 0 \quad . \text{ Αν } x^T \cdot G x = 0 \Rightarrow x_i = 0 \ \forall i \Rightarrow x = 0.$$

Φραγμένα Γραμμικά Συναρτησιακά.

$F : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$

- F γραμμικό: $F(\lambda u + \mu v) = \lambda F(u) + \mu F(v)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $u, v \in \mathcal{H}$
- F φραγμένο: $\exists\, C \geq 0$ τέτοιο ώστε $|F(v)| \leq C \cdot \|v\| \ \forall v \in \mathcal{H}$ $\longrightarrow \inf C = \|F\|$

$$\|F\| = \sup_{v \neq 0, v \in \mathcal{H}} \frac{|F(v)|}{\|v\|}$$

$$|F(v)| \leq \|F\| \, \|v\| \ \forall v \in \mathcal{H}$$

φραγμένο $\Rightarrow$ συνεχές $\quad v_n \to v \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \|v_n - v\| \to 0, \ n \to \infty$

$$|F(v) - F(v_n)| = |F(v - v_n)| \leq \|F\| \cdot \|v - v_n\| \to 0, \quad v_n \xrightarrow{\|\cdot\|} v \Rightarrow F(v_n) \to F(v)$$

Παράδειγμα: f σταθερό $\in \mathcal{H}$ $\qquad F(v) = (f, v) \ \forall v \in \mathcal{H}$

$$|F(v)| = |(f, v)| \leq \underbrace{\|f\|}_{C} \cdot \|v\| \ \forall v \in \mathcal{H} \qquad \frac{|F(v)|}{\|v\|} \leq \|f\|, \ v \neq 0$$

$$\sup \frac{|F(v)|}{\|v\|} \leq \|f\| \Rightarrow \|F\| \leq \|f\|$$

Αν $v = f$: $F(f) = \|f\|^2 \qquad \dfrac{|F(f)|}{\|f\|} = \|f\| \Rightarrow \|F\| = \|f\|_{\mathcal{H}}$

νόρμα συναρτησιακού — νόρμα του χώρου

Θεώρημα Riesz: Αν F είναι ένα γραμμικό φραγμένο συναρτησιακό σε χώρο Hilbert H. Τότε $\exists!\ f \in H$ τέτοιο ώστε $F(v) = (v, f) \ \forall v \in H$, μάλιστα $\|F\| = \|f\|$

Παρατήρηση: $(v, f) = F(v) \ \forall v \in H$ $(*)$

Δεδομένου F $\exists!$ λύση $f \in H$ των εξισώσεων $(*)$

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε. 12/02/2018

Διγραμμική μορφή: $B(u,v): H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$

$B(\lambda u+\mu v, w) = \lambda \cdot B(u,w) + \mu B(v,w)$

$B(u, \lambda v+\mu w) = \lambda B(u,v) + \mu B(u,w)$

Παράδειγμα: $B(u,v)=(u,v)$, συμμετρική διγραμμική.

Θεώρημα (Lax-Milgram): Έστω $B(\cdot;\cdot)$ διγραμμική μορφή σε χώρο Hilbert H με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\exists\ c_1 \geq 0$ τέτοιο ώστε $|B(v,w)| \leq c_1 \cdot \|v\| \cdot \|w\|$ $\forall\ v,w \in H$ (Ιδιότητα της "συνέχειας")

(ii) $\exists\ c_2 > 0$ τέτοιο ώστε $B(v,v) \geq c_2 \|v\|^2$ $\forall\ v \in H$ (B θετικά ορισμένη)

Τότε δεδομένου ενός φραγμένου γραμμικού συναρτησιακού F, $\exists!\ u \in H$ τέτοιο ώστε $B(u,v) = F(v)$ $\forall\ v \in H$ και μάλιστα $\|u\| \leq \frac{1}{c_2} \|F\|$

Απόδειξη:

• Μοναδικότητα

$B(u_1,v) = F(v) \quad \forall\ v \in H \quad , u_1 \neq u_2$

$B(u_2,v) = F(v)$

$B(u_1-u_2,v) = 0 \quad \forall\ v \in H$, παίρνω $v = u_1 - u_2 \Longrightarrow$

$$c_2 \|u_1-u_2\|^2 \leq B(u_1-u_2, u_1-u_2) = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2.$$

• $B(u,v) = F(v)$, για $v=u \Rightarrow c_2 \|u\|^2 \underset{(ii)}{\leq} B(u,u) = F(u)$, $u \neq 0$

$c_2 \|u\|^2 \leq F(u)$

$$\|u\| \leq \frac{1}{c_2} \frac{F(u)}{\|u\|} \leq \frac{1}{c_2} \|F\|$$

Μένει να δείξω την ύπαρξη.

Μάθημα 4ο ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 13/02/2018

Θεώρημα Lax - Milgram

Έστω $B(\cdot,\cdot)$ διγραμμική μορφή σε χώρο Hilbert H, με τις ιδιότητες:

(i) $\exists\ c_1 \geq 0$ τέτοιο ώστε $|B(v,w)| \leq c_1 \cdot \|v\| \cdot \|w\| \quad \forall\ v,w \in H$

(ii) $\exists\ c_2 > 0$ τέτοιο ώστε $B(v,v) \geq c_2 \|v\|^2 \quad \forall\ v \in H$

Τότε δεδομένου F φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στον H, υπάρχει μοναδικό $u \in H$ τέτοιο ώστε $B(u,v) = F(v) \quad \forall\ v \in H.$, επιπλέον $\|u\| \leq \frac{1}{c_2}\|F\|$

Απόδειξη:

Η μοναδικότητα και η εκτίμηση $\|u\| \leq \frac{1}{c_2}\|F\|$ έγινε στο προηγούμενο μάθημα

Μένει να δείξουμε την ύπαρξη του u

Θα την δείξουμε σε 4 βήματα:

Βήμα 1ο: $B(\varphi,v) = (v, A\varphi) \quad \forall\ v,\varphi \in H$, όταν A φραγμένος γραμμικός τελεστής $A: H \to H$

Σταθεροποιώ φ στο H. Έστω η απεικόνιση $v \to B(\varphi,v)$. Αυτή η απεικόνιση είναι γραμμική $\quad \lambda v + \mu w \to B(\varphi, \lambda v + \mu w)$

$\Phi(v) = B(\varphi,v)$ γραμμικό συναρτησιακό στον H και φραγμένο

$|\Phi(v)| = |B(\varphi,v)| \leq c_1 \|\varphi\|\|v\|$ Άρα Φ φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό του H

Από Θεώρημα Riesz $\exists\ \tilde{\varphi} \in H : \Phi(v) = (v, \tilde{\varphi}) \qquad \Phi(v) = B(\varphi,v) = (v,\tilde{\varphi}) \ \forall\ v \in H$

$\varphi \to \tilde{\varphi}$, γράφω $\tilde{\varphi} = A\varphi \qquad A: H \to H \quad A$ γραμμικός (Πρέπει να δείξω ότι $A(\lambda\varphi+\mu\psi) = \lambda A\varphi + \mu A\psi$

$\boxed{B(\varphi,v) = (v, A\varphi)}$

Παίρνω $v \in H$, $(v, A(\lambda\varphi+\mu\psi)) = B(\lambda\varphi+\mu\psi, v) = \lambda B(\varphi,v) + \mu B(\psi,v) = \lambda(v,A\varphi) + \mu(v,A\psi) =$
$= (v, \lambda A\varphi + \mu A\psi)$

$(v, A(\lambda\varphi+\mu\psi)) = (v, \lambda A\varphi + \mu A\psi) \quad \forall\ v \in H \Rightarrow A(\lambda\varphi+\mu\psi) = \lambda A\varphi + \mu A\psi \quad (\lambda,\mu \in \mathbb{R},\ \varphi,\psi \in H)$

(Αυτό συμβαίνει γιατί $(v,z) = (v,w)\ \forall\ v \in H \Rightarrow (v, z-w) = 0\ \forall\ v \in H$, παίρνω $v = z-w \Rightarrow \|z-w\|^2 = 0 \Rightarrow z = w$)

ορισμός (γραμμικός φραγμένος τελεστής)

$A: H \to H$ λέγεται φραγμένος αν $\exists\ \alpha \geq 0$ τέτοιο ώστε $\|Av\| \leq \alpha\|v\| \quad \forall\ v \in H$

$$\|A\| = \sup_{\substack{v \neq 0 \\ v \in H}} \frac{\|Av\|}{\|v\|} < \infty$$

$(v, A\varphi) = B(\varphi,v) \quad \forall\ v \in H.$ παίρνω $v = A\varphi \Rightarrow (A\varphi, A\varphi) = \|A\varphi\|^2 = B(\varphi, A\varphi) \leq c_1 \|\varphi\|\|A\varphi\|$

$\Rightarrow \|A\| \leq c_1 \|\varphi\|$

Άρα A φραγμένος γραμμικός τελεστής $A: H \to H$

Βήμα 2º: Ran(A) κλειστός υπόχωρος του H. (Ran(A) η εικόνα της A)

· Ran(A) υπόχωρος του H

$f \in Ran(A) \Rightarrow f = A\varphi$ $\quad \lambda f + \mu g = A(\lambda\varphi + \mu\psi)$

$g \in Ran(A) \Rightarrow g = A\psi$

· Ran(A) κλειστός

Παίρνω $\psi_n \in Ran(A)$ με $\psi_n \to \psi$ Θα δείξουμε ότι $\psi \in Ran(A)$

$\exists\, \varphi_n \in H : \psi_n = A\varphi_n$ (Θέλω να δείξω ότι φ_n Cauchy)

Άρα $B(\varphi_n, v) = (v, \psi_n)\ \forall v \in H$ $\Rightarrow B(\varphi_n - \varphi_m, v) = (v, \psi_n - \psi_m)\ \forall v \in H$

$B(\varphi_m, v) = (v, \psi_m)\ \forall v \in H$

Παίρνω $v = \varphi_n - \varphi_m$

$C_2 \|\varphi_n - \varphi_m\|^2 \underset{(ii)}{\leq} B(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) = (\varphi_n - \varphi_m, \psi_n - \psi_m) \underset{CS}{\leq} \|\varphi_n - \varphi_m\| \|\psi_n - \psi_m\| \Rightarrow$

$C_2 \|\varphi_n - \varphi_m\| \leq \|\psi_n - \psi_m\| \to 0, m,n \to \infty$ (ψ_n συγκλίνει $\Rightarrow \psi_n$ Cauchy)

$\Rightarrow \|\varphi_n - \varphi_m\| \to 0$, φ_n Cauchy, H πλήρης $\Rightarrow \exists\, \varphi \in H$ τέτοιο ώστε $\varphi_n \to \varphi$.

Είναι το $\psi = A\varphi$?

$\psi_n = A\varphi_n$

$B(\varphi_n, v) = (v, \psi_n)\ \forall v \in H$

$\downarrow * \qquad \downarrow **$

$B(\varphi, v) \quad (v, \psi)$

Το * ισχύει: $0 \leq |B(\varphi_n, v) - B(\varphi, v)| = |B(\varphi_n - \varphi, v)| \leq C_1 \|v\| \|\varphi_n - \varphi\| \to 0$

Το ** ισχύει: $|(v, \psi_n) - (v, \psi)| = |(v, \psi_n - \psi)| \leq \|v\| \|\psi_n - \psi\| \to 0$

Άρα $\left.\begin{array}{l} B(\varphi, v) = (v, \psi) \\ \quad \overset{\|}{(v, A\varphi)} \qquad \forall v \in H \end{array}\right\} \Rightarrow A\varphi = \psi$

Άρα Ran(A) κλειστός υπόχωρος του H

Βήμα 3º: Ran(A) = H

Έστω $Ran(A) \subset H$, έστω $h \in H - Ran(A)$ Επειδή Ran(A) κλειστός, υπάρχει μοναδικό $g \in Ran(A) : h = g + z$, $z \neq 0$. (g η βέλτιστη προσέγγιση του h στο Ran(A))

$h - g = z$, $(h - g, \varphi) = 0\ \forall \varphi \in Ran(A)$, $\exists\, z \neq 0 : (z, \varphi) = 0\ \forall \varphi \in Ran(A)$

$\Rightarrow \exists\, z \neq 0 : (z, A\varphi) = 0\ \forall \varphi \in Ran(A)$, $(z, A\varphi) = B(\varphi, z) \Rightarrow$

$\exists\, z \neq 0\ B(\varphi, z) = 0\ \forall \varphi \in H$, παίρνουμε $\varphi = z \Rightarrow C_2 \|z\|^2 \leq B(z,z) = 0 \Rightarrow z = 0$ Άτοπο

άρα $Ran(A) = H \Rightarrow A$ επί

ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε   13/02/2018

Βήμα 4ο: Ύπαρξη του u από το Θεώρημα του Riesz

Από το Θεώρημα του Riesz $\exists f \in H$ $F(v) = (v, f) = (v, Au) = B(u,v)$, $f = Au$ $\forall v \in H$.

Θεώρημα Galerkin

$B(\cdot,\cdot)$ διγραμμική μορφή σε χώρο Hilbert H, με τις ιδιότητες:

(i) $\exists$ $c_1 \geq 0$ τέτοιο ώστε $|B(v,w)| \leq c_1 \|v\| \cdot \|w\|$ $\forall$ $v, w \in H$

(ii) $\exists$ $c_2 > 0$ τέτοιο ώστε $B(v,v) \geq c_2 \cdot \|v\|^2$ $\forall$ $v \in H$

Δεδομένου F φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό και $u \in H$ μοναδικό από το Θεώρημα Lax-Milgram τέτοια ώστε $B(u,v) = F(v)$ $\forall$ $v \in H$

Έστω S_h υπόχωρος του H με $\dim S_h < \infty$ και έστω $B(u_h, \varphi) = F(\varphi)$ $\forall$ $\varphi \in S_h$

τότε υπάρχει μοναδικό $u_h \in S_h$ και $\|u - u_h\| \leq \frac{c_1}{c_2} \inf\{\|u - \chi\|, \chi \in S_h$.

Το u_h λέγεται προσέγγιση Galerkin του u στο S_h.

Απόδειξη:

• Υπάρχει μοναδικό $u_h \in S_h$

$B(u_h, \varphi) = F(\varphi)$ $\forall$ $\varphi \in S_h$, από Lax-Milgram το εφαρμόζω στο χώρο Hilbert S_h

Εναλλακτικά: $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ βάση του S_h ψάχνω

$u_h = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i$ $B(u_h, \varphi) = F(\varphi)$ $\forall$ $\varphi \in S_h$ $\iff B(u_h, \varphi_k) = F(\varphi_k)$, $1 \leq k \leq N$

$B(\sum_{i=1}^N c_i \varphi_i, \varphi_k) = F(\varphi_k)$ $\forall$ k $\Longrightarrow \sum_{i=1}^N c_i \, B(\varphi_i, \varphi_k) = F(\varphi_k)$ $\forall$ k

Θέτω $B(\varphi_i, \varphi_k) = M_{ki}$ και έχω: $\sum_{i=1}^N c_i M_{ki} = F(\varphi_k)$ $\forall$ k

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix}, \; f = \begin{bmatrix} F(\varphi_1) \\ \vdots \\ F(\varphi_N) \end{bmatrix}, \; M \cdot c = f$$

· αν $x^T M x > 0$, αν $x \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ τότε αντιστρέψιμος αν $\exists$ $z \neq 0$: $M z = 0 \Rightarrow z^T M z = 0$

$x^T M x = \sum_{i,j=1}^N x_i M_{ij} x_j = \sum_{i,j=1}^N x_i B(\varphi_i, \varphi_j) x_j = B(\sum_{j=1}^N x_j \varphi_j, \sum_{i=1}^N x_i \varphi_i) = B(\chi, \chi) \geq c_2 \cdot \|\chi\|$, $\chi \in S_h$, $\chi = \sum x_i \varphi_i$

$$\left.\begin{array}{l} B(u,v) = F(v) \;\; v \in H \Rightarrow B(u,\varphi) = F(\varphi) \;\; \forall \varphi \in S_h \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad B(u_h, \varphi) = F(\varphi) \;\; \forall \varphi \in S_h \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$B(u - u_h, \varphi) = 0$ $\varphi \in S_h$ (*) (Ορθογωνιότητα του σφάλματος Galerkin)

$$c_2 \|u-u_h\|^2 \le B(u-u_h, u-u_h) = B(u-u_h, u) - B(u-u_h, u_h) \qquad (u_h \in S_h \text{ , για } u_h=\varphi)$$
$$= B(u-u_h, u) - B(u-u_h, x) \quad , \; x \in S_h$$
$$= B(u-u_h, u-x) \le c_1 \|u-u_h\| \cdot \|u-x\|$$

$$\|u-u_h\| \le \frac{c_1}{c_2} \|u-x\| \quad \forall \; x \in S_h$$

$$\inf_{x \in S_h} \|u-x\| \le \|u-u_h\| \le \frac{c_1}{c_2} \inf_{x \in S_h} \|u-x\|$$

Μάθημα 5ο ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 20/2/2018

Από εδώ και πέρα όταν μιλάμε για μια διγραμμική μορφή $B(v,w), v,w \in H$ θα θεωρούμε ότι είναι συμμετρική ($B(v,w) = B(w,v)$) και ότι πληροί τα (i) και (ii) του Θεωρήματος Lax-Milgram

Θεώρημα Rayleigh-Ritz
Έστω $J: H \to \mathbb{R}$ μη γραμμικό συναρτησιακό: $J(v) = \frac{1}{2}B(v,v) - F(v)$, το $F(v)$ δεδομένο γραμμικό φραγμένο συναρτησιακό στο H, τότε το πρόβλημα ελαχιστοποίησης:
"Να βρεθεί $z \in H$ τέτοιο ώστε $J(z) = \min_{v \in H} J(v)$" έχει μοναδική λύση $z = u$, όπου u η λύση του $B(u,v) = F(v)$ $\forall v \in H$ που εξασφαλίζει το Θεώρημα Lax-Milgram.
Απόδειξη:
Έστω u η λύση από Lax-Milgram $B(u,v) = F(v)$ $\forall v \in H$. παίρνω $w \in H$ και υπολογίζω $J(u+w) = \frac{1}{2}B(u+w, u+w) - F(u+w) =$
$= \frac{1}{2}[B(u,u) + B(w,u) + B(u,w) + B(w,w)] - F(u) - F(w) =$
$= \frac{1}{2}B(u,u) - F(u) + B(u,w) - F(w) + \frac{1}{2}B(w,w) =$ ($B(u,w) - F(w) = 0$, λύση L-M)
$= J(u) + \frac{1}{2}B(w,w)$ Άρα έχω ότι:
$J(u+w) = J(u) + \frac{1}{2}B(w,w)$
Ξέρω όμως ότι το $B(w,w) \geq C_2\|w\|^2 > 0$ (ιδιότητα (ii) L-M), δηλαδή αν διαταράξω λίγο το u, το συναρτησιακό μεγαλώνει Άρα το u του L-M είναι ελάχιστο.
Επομένως $J(u+w) \geq J(u)$. Αν $J(u+w) = J(u)$ τότε $B(w,w) = 0 \Leftrightarrow w = 0$
Άρα αν $w \neq 0$ τότε $J(u+w) > J(u)$ Επομένως u μοναδικό ελάχιστο

Πόρισμα (Reyleigh-Ritz-Galerkin) συμμετρικό
Η λύση του S_h των εξισώσεων Galerkin $B(u_h, \varphi) = F(\varphi)$ $\forall \varphi \in S_h$, είναι μοναδική λύση του προβλήματος ελαχιστοποίησης:
$J(u_h) = \min_{\varphi \in S_h} J(\varphi)$

* Haim Brezis: Συναρτησιακή Ανάλυση (εκδόσεις ΕΜΠ)

Πρόβλημα 2 Σημείων

Να βρεθεί $u(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$ τέτοιο ώστε $(*)\begin{cases} -(pu')'+qu = f, & \alpha<x<\beta \quad (\Delta\varepsilon) \\ u(\alpha)=0,\ u(\beta)=0 & (66) \end{cases}$

$p(x), q(x), f(x)$ δεδομένες πραγματικές συναρτήσεις

Αν $\cdot\, p\in C^1$ στο $[\alpha,\beta]$ και υποθέτω $p(x)\geq C>0$ $\forall\, x\in[\alpha,\beta]$

- $q\in C$ στο $[\alpha,\beta]$ $q(x)\geq 0$ $\forall\, x\in[\alpha,\beta]$ και
- $f\in C$ στο $[\alpha,\beta]$

τότε το $(*)$ έχει μοναδική κλασσική λύση

Όταν λέμε κλασσική εννοούμε:

1) $u\in C^2[\alpha,\beta]$
2) Πληροί την διαφορική εξίσωση $(\Delta.\varepsilon)$ για $x\in(\alpha,\beta)$
3) Πληροί τις συνοριακές συνθήκες (66)

*"Ordinary Differential Equations" Coddington & Levinson

$-(pu')'+qu=f$ πολλαπλασιάζω με την $\varphi\in C^1[\alpha,\beta]$, $\varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0$

και μετά παίρνω $\int_\alpha^\beta$

$-\int_\alpha^\beta (pu')'\varphi + \int_\alpha^\beta qu\varphi = \int_\alpha^\beta f\cdot\varphi \iff -\left[p u'\varphi\right]_{x=\alpha}^{\beta} + \int_\alpha^\beta p u'\varphi' + \int_\alpha^\beta qu\varphi = \int_\alpha^\beta f\cdot\varphi \iff$

$\int_\alpha^\beta (p\, u'\varphi' + qu\varphi) = \int_\alpha^\beta f\varphi,\ \forall\varphi\in C^1[\alpha,\beta],\ \varphi(\alpha)=\varphi(\beta)=0$ $\qquad -p(\beta)u'(\beta)\cdot\varphi(\beta) + p(\alpha)u'(\alpha)\varphi(\alpha) = 0$

$\begin{cases} B(u,\varphi) = \int_\alpha^\beta p u'\varphi' + qu\varphi, & u,\varphi\in C^1 \\ F(\varphi) = \int_\alpha^\beta f\varphi \end{cases}$

Άρα έχω $B(u,\varphi)=F(\varphi)$ $\forall\, u\in C^1$, $\forall\,\varphi\in C^1$, όμως δεν είμαι σε χώρο Hilbert

Σύμβολα

$I=(\alpha,\beta)$, $\bar{I}=[\alpha,\beta]$

$C(I)$ συνεχείς συναρτήσεις στο I π.χ. $f(x)=\frac{1}{x}\in C(0,1)$

$C(\bar{I}) = C([\alpha,\beta])$ συνεχείς συναρτήσεις στο $\bar{I}$

$C(\bar{I})$ χώρος Banach με $\|f\|_\infty = \max_{\alpha\leq x\leq\beta}|f(x)|$

ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 20/2/2018

$(f,g) = \int_\alpha^\beta f(x)\, g(x)\, dx$

$\|f\| = \left(\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx\right)^{1/2} = (f,f)$ = "L^2 νόρμα"

ο $(C(\bar{I}), \|\cdot\|)$ δεν είναι πλήρης

* Royden, "Real Analysis"

Η πλήρωση του $(C(\bar{I}), \|\cdot\|)$ είναι χώρος Hilbert, $H = (L^2(I), (f,g))$

$\overline{C(\bar{I})}^{\|\cdot\|} = L^2(I)$, ο $C(\bar{I})$ είναι πυκνός στον $L^2(I), \|\cdot\|$

ο $L^2(I)$ αποτελείται από f πραγματικές στο I, οι f μετρήσιμες ως προς το μέτρο Lebesgue στο I και f^2 ολοκληρώσιμη , $\int_\alpha^\beta f^2 dx < \infty$ (ολοκλήρωμα Lebesgue)

(i) Τα στοιχεία του $L^2(I)$ δεν είναι (αν και θα τις λέμε) συναρτήσεις, αλλά είναι κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων.

$f \sim g \iff f(x) = g(x)$ για x σχεδόν παντού στο I

(ii) $\|f\| = 0 = \left(\int_\alpha^\beta f^2(x)\,dx\right)^{1/2}$, f συνεχής $\Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in I$

αν $f \in L^2(I)$ και $\|f\| = 0 \Rightarrow f(x) = 0$ σχεδόν παντού στο I

(iii) Δεν έχει νόημα η τιμή $f(x_0)$ ενός στοιχείου του L^2 σε σημείο x_0.

Μάθημα 6ο ΕΦΜ.4 Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 26/2/2018

Συμβολισμός

- $C(I)$: συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα I
- $C(\overline{I})$: συνεχείς συναρτήσεις στο κλειστό διάστημα $\overline{I}$
- $C^k(I)$: συναρτήσεις με κ συνεχείς παραγώγους στο I
- $C^k(\overline{I})$: συναρτήσεις με κ συνεχείς παραγώγους στο $\overline{I}$
- $C_c(I) = \{ f \in C(I) : \text{supp} f$ συμπαγές στο $I \}$ (ο φορέας της $f := \text{supp} f = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$, $x \notin \text{supp} f \Rightarrow f(x) = 0$)
- $C_c^k(I)$: $f, f', \dots, f^{(k)}$ συνεχείς στο I και ο έξω από συμπαγές υποσύνολο του I
- $C^\infty(I) = \bigcap_{k \geq 0} C^k(I)$
- $C_c^\infty(I) \equiv C_0^\infty(I) = \bigcap_{k \geq 0} C_c^k(I)$

$f \in L^2(I)$, f μετρήσιμη (Lebesgue) τέτοια ώστε $|f|^2$ ολοκληρώσιμη στο I (Lebesgue) $\int_I f^2 < \infty$

Από εδώ και πέρα $\|f\| = \sqrt{\int_I f^2 dx}$, $(f, g) = \int_I f g$

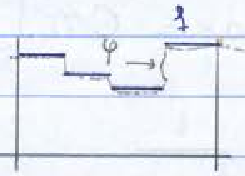
$f = g$ στον $L^2(I) \Longrightarrow f(x) = g(x)$ σχεδόν παντού στο I

- $f \in L^p(I)$, $1 \leq p < \infty$, f μετρήσιμη , $|f|^p$ ολοκληρώσιμη $\int_I |f|^p < \infty$
- $f \in L^1(I)$ οι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στο I $\int_I |f| < \infty$
- $f \in L^1_{loc}(I)$ οι ολοκληρώσιμες σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του I

π.χ $f(x) = \frac{1}{x} \notin L^1(0,1)$ αλλά $f(x) \in L^1_{loc}(0,1)$

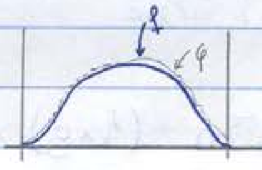
Λήμματα πυκνότητας και προσέγγισης (για αποδείξεις βλέπε Brezis)

- **(0)** ο $C(I)$ είναι πυκνός στον $L^2(I)$



Δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$ $\forall f \in L^2(I)$ $\exists \varphi \in C(I)$ τέτοια ώστε $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$

- **(1)** ο $C_c(I)$ είναι πυκνός στον $L^2(I)$

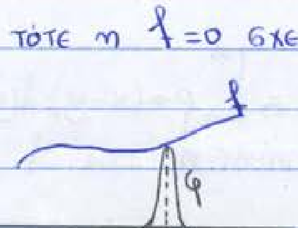


$\forall f \in L^2(I)$, $\varepsilon > 0$ $\exists \varphi \in C_c(I)$ τέτοιο ώστε $\|f - \varphi\| \leq \varepsilon$

- **(2)** Αν $f \in L^1_{loc}(I)$ και $\int_I f \cdot \varphi = 0$ $\forall \varphi \in C_c(I)$ τότε η $f = 0$ σχεδόν παντού στο I

αν $f \in C(I)$ τοπικά ολοκληρώσιμη

$\int_I f \cdot \varphi = 0$ $\forall \varphi \in C_c(I) \Longrightarrow f(x) = 0$ $\forall x \in I$



(3) ομαλοποιητικές ακολουθίες

Ορισμός: Μια ακολουθία λέγεται ομαλοποιητική ακολουθία στον $\mathbb{R}$ αν έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

(ii) $\operatorname{supp} \rho_n = [-1/n, 1/n]$

(iii) $\rho_n \geq 0$

(iv) $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n = 1$

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & , |x| \leq 1 \\ 0 & , |x| > 1 \end{cases}$$

$\rho(x) = e^{-y}$, $y = \frac{1}{1-x^2} \xrightarrow{|x| \to 1} \Rightarrow y \to +\infty$

$x \to \pm 1 \Rightarrow \rho(x) \to 0$

$\operatorname{supp} \rho = [-1, 1]$ $\qquad \rho'(x) = e^{-y} \, dy/dx = \frac{e^{-y} 2x}{(1-x^2)^2} = 2x \cdot e^{-y} \cdot y^2 \xrightarrow{|x| \to 1} 0$

$\rho^{(j)}(x) = \Pi_{(j)}(x) \cdot e^{-y} \cdot y^{2j} \xrightarrow{y \to \infty} 0$ $\qquad$ Άρα $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$\rho_n(x) = C \cdot n \cdot \rho(n x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ $\qquad C > 0$ σταθερά

$\rho(nx) = 0$ αν $|x| > 1$ $\qquad$ δηλαδή $|x| > 1/n$

$\operatorname{supp} \rho_n = [-1/n, 1/n]$, $\rho_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ $\quad \rho_n \geq 0$

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)\, dx = C n \int_{-\infty}^{\infty} \rho(nx)\, dx \overset{\substack{nx = z \\ dx = dz/n}}{=} C \frac{n}{n} \int_{-\infty}^{\infty} \rho(z)\, dz = C \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-z^2}} dz = 1$$

$$\Rightarrow C = \frac{1}{\int_{-1}^{1} \rho(z) dz}$$

(4) Συνέλιξη $\quad (f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \cdot g(y)\, dy$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad$ (πρέπει και οι 2 να ορίζονται στο $\mathbb{R}$)

Θεωρώ $(\rho_n * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x-y) f(y) = \int_{x-1/n}^{x+1/n} \rho_n(x-y) f(y)\, dy$. $\rho_n(x-y) = 0$, $|x-y| \geq 1/n$

$(\rho_n * f)(x)$: ομαλοποίηση της f ή γενικευμένος "μέσος" της f.

Αν $f \in L^2(I) \Longrightarrow f \in L^1_{loc}(I)$ $\qquad \int_K |f| = \int_K 1 \, |f| \underset{CS}{\leq} \sqrt{\int_K 1^2} \sqrt{\int_K |f|^2} < \infty$

$K \subset I$

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 26/2/2018

$(\rho_n * f) \in C^{\infty}(\mathbb{R})$

$(\rho_n * f)(x_0) = \int_{x_0-1/n}^{x_0+1/n} \rho_n(x_0-y) f(y)\,dy = f(\xi)\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x-y)\,dy = f(\xi)$

$\rho_n * f \xrightarrow{n\to\infty} f$

• (5) Λήμματα προσέγγισης και ομαλοποίησης

(i) $f \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow \rho_n * f \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ και $\rho_n * f \to f$ ομοιόμορφα σε συμπαγή

δηλαδή $\forall K \subset\subset \mathbb{R}$ $\sup_{x\in K} |(\rho_n * f)(x) - f(x)| \to 0$, $n\to\infty$ (K συμπαγές)

(ii) $f \in C_c(I)$ επεκτείνω την f με 0 στο $\mathbb{R}$. Τότε $(\rho_n * f) \in C_c^{\infty}(\mathbb{R})$ για $n \geq n_0$ και συγκλίνει στο f ομοιόμορφα στο I

$\sup_{x\in I} |(\rho_n * f)(x) - f(x)| \to 0$, $n\to\infty$

(iii) $f \in L^2(I)$ επεκτείνω την f με 0 στο $\mathbb{R} \Rightarrow \rho_n * f \in C^{\infty}(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$

$\|\rho_n * f\| \leq \|f\|$ και $\|\rho_n * f - f\| \to 0$, $n\to\infty$

• (6) $C_c^{\infty}(I)$ πυκνός στον $L^2(I)$

$\forall f \in L^2, \varepsilon > 0 \ \exists \varphi \in C_c^{\infty}(I) : \|f - \varphi\| \leq \varepsilon$

(i) $C_c(I)$ πυκνό

(ii) $\rho_n * C_c(I)$

$C_c^{\infty}(I) \subset C_c^{k}(I) \subset C_c(I) \subset L^2(I)$

Μάθημα 7ο ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 27/2/2018

Αν $u \in C^1(\bar{I})$, $I=(\alpha,\beta)$, $\varphi \in C_c^1(I)$ $\int_I u\varphi' = u(\beta)\cdot\cancel{\varphi(\beta)}^{\,0} - u(\alpha)\,\cancel{\varphi(\alpha)}^{\,0} - \int_I u'\varphi \Longrightarrow$

$\int_I u\cdot\varphi' = -\int_I u'\varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(I)$

Ορισμός: ο $H^1(I) \equiv H^1 = \{ u \in L^2(I) : \exists\, g \in L^2(I)$ τέτοιο ώστε $\int_I u\cdot\varphi' = -\int_I g\cdot\varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(I) \}$

και τα 2 ολοκληρώματα υπάρχουν: $((\cdot,\cdot)_{L^2},\ \|\ \| \equiv \|\ \|_{L^2})$

$|\int u\varphi| = |(u,\varphi')| \le \|u\|\,\|\varphi'\|$ συναρτήσεις δοκιμής

$|(g,\varphi)| \le \|g\|\,\|\varphi\|$ (test functions)

Παρατηρήσεις:

1 Έχει νόημα ο ορισμός του H^1

2 Το g είναι μοναδικό

Έστω ότι $\exists\, g_1 \ne g_2 \in L^2(I)$ τέτοια ώστε: $(u,\varphi') = -(g_1,\varphi) \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(I)$

$(u,\varphi') = -(g_2,\varphi)$

$(\overbrace{g_1-g_2}^{\in L^2(I)},\varphi) = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(I)$ $C_c^1(I)$ πυκνός στον $L^2(I)$

κάνω χρήση του παρακάτω:

"Έστω $v \in \mathcal{H}$, $(v,\varphi)=0 \ \forall\, \varphi \in M$, πυκνός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ ($\exists\, \varphi_n \in M : \varphi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} v$), τότε

$0 = (v,\varphi_n) \longrightarrow (v,v) \Longrightarrow (v,v)=0 \Longrightarrow v=0$"

Άρα $g_1 - g_2 = 0 \Longrightarrow g_1 = g_2$ ως στοιχεία του $L^2(I)$ ($g_1(x) = g_2(x)$: x σχεδόν παντού στο I)

Λέμε ότι η g είναι η "ασθενής" ή "γενικευμένη" παράγωγος της u (με την έννοια του L^2)

3 ο $H^1(I)$ περιλαμβάνει συναρτήσεις που έχουν συνεχή παράγωγο με τη συνήθη έννοια: $u \in C^1(I) \cap L^2(I)$, $u' \in L^2(I)$, $\text{supp}\,\varphi = K \subset I$

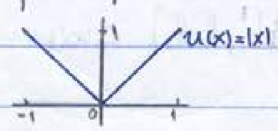
$\int_I u\varphi' = \int_K u\varphi' = -\int_K u'\varphi = -\int_I u'\varphi$

4 Αν $u \in H^1(I)$ η g είναι η παράγωγος του u με την έννοια των κατανομών.

$\varphi \in C_c^\infty(I)$ $\int u\cdot\varphi' = -\int g\varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(I)$

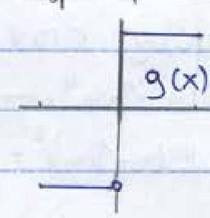
$\Updownarrow \qquad \Downarrow \qquad \Uparrow\ \varphi \in C_c^1 \Rightarrow \rho_n * \varphi \in C_c^\infty$

$\int u\varphi' = -\int g\varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(I)$



5 Παράδειγμα

$u(x) = |x|$, $I = (-1,1)$, $g(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < 1 \\ 0, & -1 < x < 0 \end{cases}$



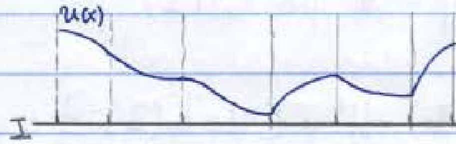
ελέγχω αν $\int_I u\varphi' \overset{?}{=} -\int_I g\,\varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^1(I)$

$$\int_I u\cdot\varphi' = \int_{-1}^{1}|x|\varphi'(x)\,dx = -\int_{-1}^{0}x\,\varphi'(x)\,dx + \int_{0}^{1}x\,\varphi'(x)\,dx = -\cancel{[x\,\varphi(x)]_{-1}^{0}} + \int_{-1}^{0}\varphi(x)\,dx + [x\,\varphi(x)]_{0}^{1} - \int_{0}^{1}\varphi(x)\,dx$$

$$= -\left[\int_{-1}^{0}(-1)\varphi(x)\,dx + \int_{0}^{1}(+1)\varphi(x)\,dx\right] = -\int_{-1}^{1} g\cdot\varphi$$

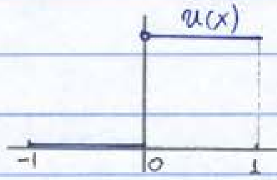
Άσκηση: $I=(\alpha,\beta)$, $u\in C(\bar{I})$ κατά τμήματα C'

$g=u'$ ← κατά τμήματα, $u\in H^1(I)$



⑥ $\exists\, u\in L^2(I) : u\notin H^1(I)$, $I=(-1,1)$

$$u(x) = \begin{cases} 1, & 0<x<1 \\ 0, & -1<x\leq 0 \end{cases}$$



Αν $u\in H^1$ τότε $\exists\, g\in L^2(-1,1)$ τέτοια ώστε:

$\int_{-1}^{1}u\varphi' = -\int_{-1}^{1}g\varphi \quad \forall\, \varphi\in C_c^1(-1,1) \iff \int_{-1}^{1}u\varphi' = \int_{-1}^{0}0\cdot\varphi' + \int_0^1\varphi' = \cancel{\varphi(1)} - \varphi(0)$, θα πρέπει λοιπόν

$\int_{-1}^{1}g\cdot\varphi = \varphi(0) \quad \forall\, \varphi\in C_c^1(-1,1) \qquad \exists\, g\in L^2(I)$?

για $\forall\,\varphi\in C_c^1(-1,0)$

$\int_{-1}^{1}g\varphi = 0$ αλλα $g\in L^2(-1,0)$

$(g,\varphi)_{L^2(-1,0)}$ $\quad C_c^1(-1,0)$ πυκνός στον $L^2(-1,0)$. Άρα $g=0$ στον $L^2(-1,0)$

Όμοια και $\forall\,\varphi\in C_c^1(0,1)$ $\; g=0 \in L^2(0,1)$

Άρα $g=0$ στο $L^2(-1,1)$. Άτοπο γιατί τότε $\int_{-1}^{1}g\cdot\varphi = 0$, το οποίο όμως ίσο με $-\varphi(0)$ $\forall\varphi$

Από τη στιγμή που g μοναδικό θα γράφουμε $g=u'$

H^1 διανυσματικός χώρος υπόχωρος του L^2

Έστω $u, v\in H^1$

$\quad u'\;\; v'$ τότε $\lambda u+\mu v\in H^1$ και $(\lambda u+\mu v)' = \lambda u'+\mu v'$

$$\int_I(\lambda u+\mu v)\,\varphi' = \lambda\int_I u\cdot\varphi' + \mu\int_I v\cdot\varphi' = -\lambda\int_I u'\varphi - \mu\int_I v'\varphi = -\int(\lambda u'+\mu v')\,\varphi.$$

$u\in H^1(I)$, $\|\cdot\|_1$: $\|u\|_1 = \sqrt{\|u\|^2+\|u'\|^2} < \infty$, $\quad\|\cdot\|$ η L_2 νόρμα

$u, v\in H^1 \quad (u,v)_1 := (u,v)+(u',v')$

Θεώρημα: ο $(H^1,\|\cdot\|_1)$ είναι χώρος Hilbert.

Απόδειξη:

Έστω $\{u_n\}$ Cauchy στον $(H^1,\|\cdot\|_1)$. Θα δείξω ότι $\exists\, u\in H^1$ τέτοιο ώστε:

$u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} u$, $\quad \|u_n-u_m\|_1 \longrightarrow 0$, $n,m\longrightarrow\infty$

$0 \longleftarrow \|u_n-u_m\|_1^2 = \|u_n-u_m\|^2 + \|u_n'-u_m'\|^2 \Longrightarrow (u_n)$ και (u_n') Cauchy στον L^2

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 27/2/2018

Επειδή L^2 πλήρης $\exists\, u \in L^2 : u_n \xrightarrow{\|\cdot\|} u$

$\exists\, g \in L^2 : u_n' \xrightarrow{\|\cdot\|} g$

$$(u_n, \varphi') = -(u_n', \varphi) \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$$

$$\underset{n\to\infty}{\downarrow}(u, \varphi') \qquad \underset{n\to\infty}{\downarrow} -(g, \varphi) \implies (u, \varphi') = -(g, \varphi) \ \forall \varphi \in C_c^1(I) \implies u \in H^1 \text{ και } u' = g$$

μένει να δείξω ότι $u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} u$

$$\|u_n - u\|_1^2 = \underbrace{\|u_n - u\|^2}_{\to 0} + \underbrace{\|u_n' - u'\|^2}_{\to 0} \longrightarrow 0 \implies u_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} u$$

Άρα H^1 πλήρης

Παρατήρηση:

L^2 διαχωρίσιμος

$L^2 \times L^2$ διαχωρίσιμος

$\|(u,v)\|_{L^2\times L^2} = (\|u\|^2 + \|v\|^2)^{1/2}$

$H^1 : (u, u')$ ορίζω $T : H^1 \longrightarrow L^2 \times L^2$ $\quad Tu \longrightarrow (u, u')$ γραμμική απεικόνιση

δεν είναι επί, αλλά στο $Ran(T) \subset L^2 \times L^2$ είναι επί.

$Ran(T)$ κλειστός

κλειστός υπόχωρος διαχωρίσιμου $\Rightarrow$ διαχωρίσιμος

$\|Tu\|_{L^2\times L^2} = \|u\|_1$

Μάθημα 8º ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 5/3/2018

I διάστημα

$H^1 = H^1(I) = \{ u \in L^2(I) : \exists\, g \in L^2(I) : \int_I u\varphi' = -\int_I g\varphi \ \ \forall \varphi \in C_c^1(I) \}$

$g = u'$: η γενικευμένη (ασθενής) παράγωγος του u (με την έννοια του L^2)

$u \in H^1(I)$: $\|u\|_1 = \sqrt{\|u\| + \|u'\|}$

$(u,v)_1 = (u,v) + (u',v')$, $(f,g) = \int_I f \cdot g$

$\|u\| = \sqrt{\int_I u^2(x)\,dx}$ $H^1, (\cdot,\cdot)$ $\|\cdot\|$ είναι χώρος Hilbert

Βασικό Θεώρημα (Χαρακτηρισμός του $H^1(I)$)

Έστω $u \in H^1(I)$ τότε $\exists\, \tilde{u} \in C(I)$ τέτοιο ώστε $u(x) = \tilde{u}(x)$, για σχεδόν παντού στο I

Επιπλέον $\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\,dt$

Παρατηρήσεις

(0) $\exists$ ολοκλήρωμα $\int_y^x u'(t)\,dt$ $x > y$, $x, y \in I$

$$\int_y^x 1\,|u'(t)|\,dt \overset{CS}{\leq} \left(\int_y^x 1\,dt\right)^{1/2} \left(\int_y^x |u'(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \leq \sqrt{x-y}\sqrt{\int_I |u'|^2} = \sqrt{x-y}\,\|u'\|_{L^2(I)} < \infty$$

$\tilde{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t)\,dt + \tilde{u}(y_0)$, όντως συνεχής συνάρτηση του $x \in I$

$|\tilde{u}(x) - \tilde{u}(x_1)| \leq \int_{x_1}^x |u'(t)|\,dt$

(1) Αν $v \in H^1(I)$, $v = w$ σχεδόν παντού στο $I \Rightarrow w \in H^1(I)$

$w \in L^2(I)$ $\exists\, w' \in L^2(I)$?? φυσικά, αφού:

$\int v\varphi' = -\int v'\varphi \ \ \forall \varphi$ άρα $w \in H^1$ και $w' = v'$

$\int w\varphi' =$

(2) Στην κλάση ισοδυναμίας $u \in H^1$, $\exists$ συνεχής αντιπρόσωπος $\tilde{u}$

(3) Ο συνεχής αυτός αντιπρόσωπος είναι μοναδικός.

Αν $\exists\, \tilde{u}, \tilde{v}$ συνεχή τέτοια ώστε:

$$\left.\begin{array}{l} u = \tilde{u} \text{ σχεδόν παντού στο } I \\ u = \tilde{v} \text{ σχεδόν παντού στο } I \end{array}\right\} \Rightarrow \tilde{u} = \tilde{v} \text{ σχεδόν παντού στο } I \Rightarrow \tilde{u} = \tilde{v} \ \ \forall x \in I$$

(4) Παίρνω το $\tilde{u}$ αλλάζοντας το u σε σύνολο μέτρου 0 στο I

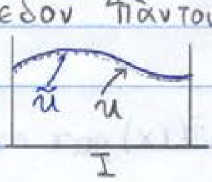
(5) Με τον όρο "Τιμή $u(x)$" του u στο x εννοούμε $\tilde{u}(x)$

(6) Η u είναι "απόλυτα συνεχής"

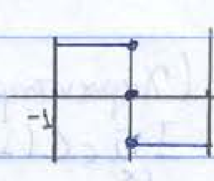
(7) $u = \tilde{u}$ σχεδόν παντού, $\tilde{u}$ συνεχής

u σχεδον παντου συνεχης

$u = \tilde{u}$ σχεδόν παντού συνεχής



/ u σχεδόν παντού συνεχής



Ιδέα της απόδειξης

Σταθεροποιώ $x_0 \in I$ και ορίζω $\bar{u}(x) := \int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt$ $\bar{u}$ συνεχής στο I

Ισχύει ότι $\int_I \bar{u}\varphi' = -\int_I u'\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$

(αν πχ $\bar{u}$ παραγωγίσιμη τότε προφανές) Απόδειξη του 1ου λήμματος Fubini

$u \in H^1 \Rightarrow \int_I u\varphi' = -\int_I u'\varphi \ \forall \varphi \in C_c^1(I)$ $\int_I (\bar{u} - u)\varphi' = 0 \ \forall \varphi \in C_c^1(I)$

Αν $\bar{u} - u \in C^1 \Rightarrow \int_I (\bar{u} - u')\varphi = 0 \ \forall \varphi \in C_c^1(I)$

$(\bar{u} - u)' = 0 \Rightarrow \bar{u} - u =$ σταθερά στο I. Αλλά $\bar{u} - u \notin C^1$

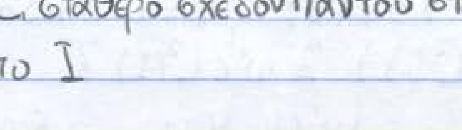
Από το 2ο Λήμμα των σημειώσεων $\Rightarrow \bar{u} - u = C$ σταθερό σχεδόν παντού στο I

Συμπέρασμα : $u = \bar{u} - C$ σχεδόν παντού στο I

$\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) - C$: $\tilde{u} \in C(\bar{I})$ και $u = \tilde{u}$ σχεδόν παντού

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_{x_0}^{x} u'(t)\,dt - c - \int_{x_0}^{y} u'(t)\,dt + C = \int_y^x u'(t)\,dt.$$

Ιδιότητες του H^1



1) Επέκταση $H^1(I) \rightsquigarrow H^1(\mathbb{R})$

Υπάρχει γραμμικός τελεστής επέκτασης $E: H^1(I) \longrightarrow H^1(\mathbb{R})$, τέτοιος ώστε:

(i) $\exists$ σταθερά $C : \|Eu\|_{L^2(\mathbb{R})} \le C \cdot \|u\|_{L^2(I)} \quad \forall u \in H^1(I)$ $(C = 2\cdot\sqrt{2})$

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 5/3/2018

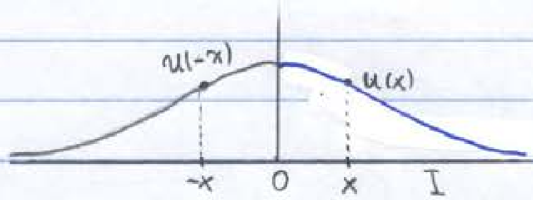
(ii) $\exists\ \tilde{C} : \|Eu\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq \tilde{C}\|u\|_{H^1(I)} \quad \forall u \in H^1(I) \quad \Big(\tilde{C} = \underset{\text{αριθμητική σταθερά}}{C_0}\ \big(1 + \frac{1}{\mu(I)}\big)\Big)$

Ιδέα της απόδειξης

(i) Έστω $I = (0,\infty)$

$(Eu)(x) = u^*(x) = \begin{cases} u(x) & , x>0 \\ u(-x) & , x<0 \end{cases}$

άρτια ανάκλαση



$\|u^*\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_0^\infty u^2(x)\,dx + \int_{-\infty}^0 u^2(-x)\,dx = 2\int_0^\infty u^2(x)\,dx = 2\|u\|^2_{L^2(I)}$

$Eu|_I = u, \quad \|Eu\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2}\,\|u\|_{L^2(I)} \qquad \|(Eu)'\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \|\tilde{u}\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = \int_0^\infty (u'(x))^2dx + \int_{-\infty}^0 (u'(-x))^2 dx$

$= 2\|u\|^2_{L^2(I)}$

$(Eu)'(x) = \tilde{u} := \begin{cases} u'(x) & , x>0 \\ -u'(-x) & , x<0 \end{cases}$

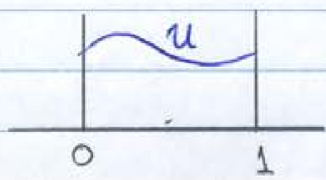
Είναι η $\tilde{u}$ η ασθενής παράγωγος του u^*; Δηλαδή $\int_{\mathbb{R}} u^*\varphi' = -\int_{\mathbb{R}} \tilde{u}\varphi \ \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R})$;

Ναι (βλέπε σημειώσεις)

Όντως Eu επέκταση του u

Αντίστοιχα για $I = (\alpha,\infty)$ ή $I = (-\infty,\alpha)$

(ii) $I = (0,1)$



Αν θεωρήσω την $\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & , x \in I \\ 0 & , x \notin I \end{cases}$

δεν δουλεύει γιατί $\tilde{u} \notin H^1(\mathbb{R})$ επειδή $\tilde{u}$ δεν είναι συνεχής

Μάθημα 9ο ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 6/3/2018

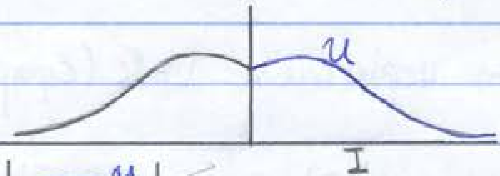
Θεώρημα επέκτασης

E γραμμικός $: H^1(I) \longrightarrow H^1(\mathbb{R})$

(i) $Eu|_I = u \quad \forall u \in H^1(I)$

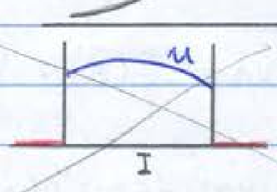
(ii) φραγμένο στο $L^2(\mathbb{R})$ και $H^1(\mathbb{R})$ $\quad \|Eu\|_{\substack{L^2(\mathbb{R})\\H^1(\mathbb{R})}} \leq C \cdot \|u\|_{\substack{L^2(I)\\H^1(I)}}$

(1) $I = (0, \infty)$



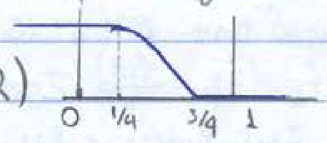
$$Eu = \begin{cases} u(x) & , x > 0 \\ u(-x) & , x < 0 \end{cases}$$

(2) $I = (0, 1)$



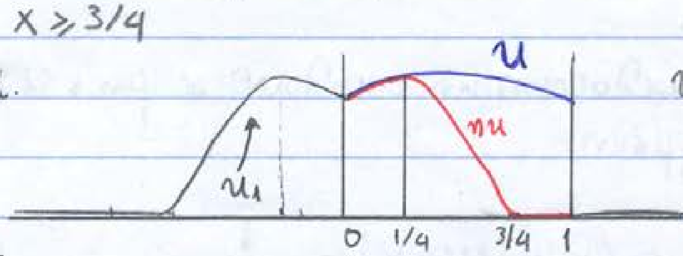
όχι επέκταση με 0 γιατί δεν θα είναι συνεχής

Ομαλή γεφυροποίηση $\eta(x) \in C^1(\mathbb{R})$



$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & , x \leq 1/4 \\ \text{την ορίζω να πηγαίνει ομαλά από το 0, στο 1} & \\ 0 & , x \geq 3/4 \end{cases}$$

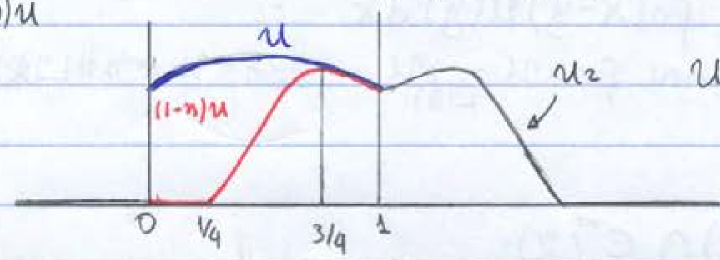
Θεωρώ την ηu.



u_1: Επέκταση της ηu στο $\mathbb{R}$

$u_1 \in H^1(\mathbb{R})$

Θεωρώ και την $(1-\eta)u$

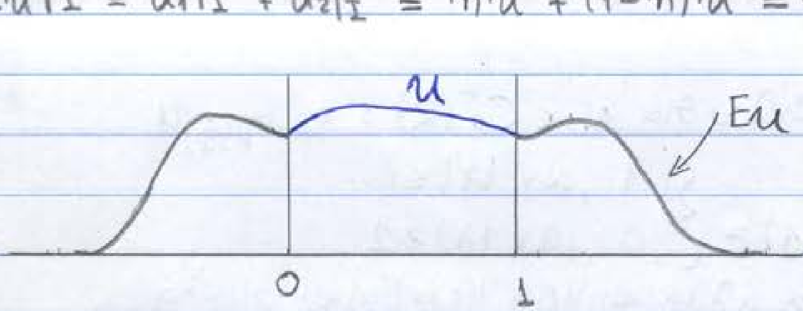


u_2: Επέκταση της $(1-\eta)u$ στο $\mathbb{R}$

$u_2 \in H^1(\mathbb{R})$

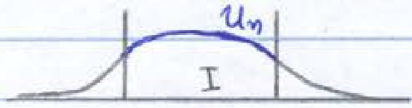
Θεωρώ την $Eu = u_1 + u_2 \in H^1(\mathbb{R})$

$Eu|_I = u_1|_I + u_2|_I = \eta u + (1-\eta)u = u$



Θεώρημα Πυκνότητας

Αν $u \in H^1(I)$ τότε υπάρχει ακολουθία $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $u_n|_I \xrightarrow{H^1(I)} u$



$u_n|_I \in C^\infty(\bar{I})$

Παρατήρηση: Αν $I=\mathbb{R}$ τότε $C_c^\infty(\mathbb{R})$ είναι πυκνός του $H^1(\mathbb{R})$

Απόδειξη:

Αρκεί να αποδείξω το Θεώρημα στη περίπτωση $I=\mathbb{R}$ (Εφαρμογή του Θεωρήματος επέκτασης).

Έστω ότι αποδείχθει στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $\forall v \in H^1(\mathbb{R})$, $\exists v_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}) : v_n \xrightarrow{H^1(\mathbb{R})} v$

Έστω $u \in H^1(I)$ θεωρώ την επέκταση $Eu \in H^1(\mathbb{R})$ και έστω $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ακολουθία τέτοια ώστε $u_n \xrightarrow{H^1(\mathbb{R})} Eu$

$$\|\underbrace{u_n|_I}_{C^\infty(\bar{I})} - u\|_{H^1(I)} = \|u_n|_I - Eu|_I\|_{H^1(I)} \le \|u_n - Eu\|_{H^1(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$$

2 εργαλεία που θα χρειαστώ

- $u \in H^1(\mathbb{R})$ συνέλιξη με ομαλοποιητική ακολουθία $\rho_n * u$
- ομαλή αποκοπή με φραγμένη

$u \in L^2(\mathbb{R})$ $\quad (\rho_n * u)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(x-y)u(y)\,dx$

$\rho_n * u \in C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ και $\rho_n * u \xrightarrow[L^2(\mathbb{R})]{} u$ $\quad \|\rho_n * u - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$

$\|\rho_n * u\|_{L^2(\mathbb{R})} < \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}$

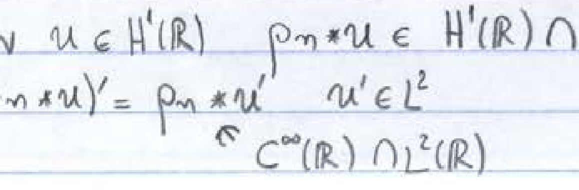
αν $u \in H^1(\mathbb{R})$ $\quad \rho_n * u \in H^1(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R})$

$(\rho_n * u)' = \underbrace{\rho_n * u'}_{C^\infty(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})}$ $\quad u' \in L^2$

$\rho_n * u \xrightarrow{H^1(\mathbb{R})} u$

Έστω $u \in H^1(\mathbb{R})$ θα κατασκευάσω ακολουθία $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}) : u_n \xrightarrow[H^1(\mathbb{R})]{} u$

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } |x| \le 1 \\ 0, & \text{αν } |x| \ge 2 \end{cases}$$



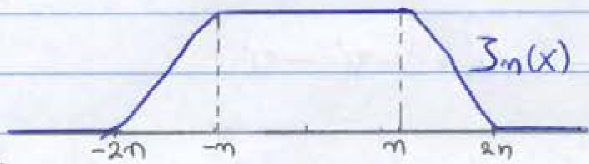
στα άλλα σημεία μεταβαίνει ομαλά

$|\zeta(x)| \le 1$, $x \in \mathbb{R}$

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 6/3/2018

$\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ $\text{supp}\,\zeta = [-2,2]$

$\zeta_n(x) = \zeta(\frac{x}{n})$
$n = 1,2,\dots$



$\forall n \quad \zeta_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

$\zeta_n = \begin{cases} 1 & , |x| \le n \\ 0 & , |x| \ge 2n \end{cases}$ $|\zeta_n(x)| \le 1 \quad \forall x, \forall n$ $\text{supp}\,\zeta_n = [-2n, 2n]$

$\zeta_n'(x) = \frac{d}{dx}\zeta(\frac{x}{n}) = \frac{1}{n}\zeta'(\frac{x}{n})$ $|\zeta_n'(x)| = \frac{1}{n}|\zeta'(\frac{x}{n})| \le \frac{1}{n} \overbrace{\max_{y\in\mathbb{R}} |\zeta'(y)|}^{c}$

Άρα $|\zeta_n'(x)| \le c/n \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\zeta_n f = \begin{cases} f & , |x| \le n \\ \zeta_n f & , \text{ενδιάμεσα} \\ 0 & , |x| \ge 2n \end{cases}$

$f \in L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \zeta_n f \in L^2(\mathbb{R})$

$\|\zeta_n f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_n^2 f^2 \le \overbrace{\max|\zeta_n|^2}^{\le 1} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}^2$

$\|\zeta_n f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$

$\forall x \in \mathbb{R} \quad \zeta_n(x) f(x) \longrightarrow f(x) \quad , n \to \infty$

$\zeta_n f \xrightarrow[L^2(\mathbb{R})]{} f$ (LDCT) (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης)

$(\zeta_n f - f)^2 \le 2\left((\zeta_n f)^2 + f^2\right) \le 4f^2$, $\int f^2 < \infty \quad f \in L^2(\mathbb{R})$

$\zeta_n f \xrightarrow[L^2(\mathbb{R})]{} f \qquad \forall f \in L^2(\mathbb{R}) \quad \|\zeta_n f - f\|_{L^2(\mathbb{R})} \to 0 \quad , n \to \infty$

Έστω $u \in H^1(\mathbb{R})$ ορίζω $u_n := \underbrace{\zeta_n}_{C_c^\infty(\mathbb{R})} \cdot \underbrace{(\rho_n * u)}_{C^\infty(\mathbb{R}) \cap H^1(\mathbb{R})}$

$u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $u_n \xrightarrow[H^1(\mathbb{R})]{???} u$

$u_n \xrightarrow[L^2(\mathbb{R})]{} u \qquad u_n - u = \zeta_n(\rho_n * u) - u = (\zeta_n(\rho_n * u) - \zeta_n u) + (\zeta_n u - u)$

$\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \|\zeta_n(\rho_n * u) - \zeta_n u\|_{L^2(\mathbb{R})} + \underbrace{\|\zeta_n u - u\|_{L^2(\mathbb{R})}}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0}$

$\|\zeta_n[(\rho_n * u) - u]\|_{L^2(\mathbb{R})} \le \|\rho_n * u - u\|_{L^2(\mathbb{R})} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$u_n = J_n(\rho_n * u)$$

$$u_n' = J_n'(\rho_n * u) + J_n(\rho_n * u)' = J_n'(\rho_n * u) + J_n(\rho_n * u')$$

$$u_n' - u' = J_n'(\rho_n * u) + J_n(\rho_n * u') - J_n u' + J_n u' - u'$$

$$\|u_n' - u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|J_n'(\rho_n * u)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|J_n(\rho_n * u' - u)\|_{L^2(\mathbb{R})} + \|J_n u' - u'\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

$$\|J_n u' - u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \ , \ n \to \infty \ , \ u' \in L^2(\mathbb{R})$$

$$\|J_n(\rho_n * u' - u')\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \|\rho_n * u' - u'\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0$$

$$\|J_n'(\rho_n * u)\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{n}\|\rho_n * u\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \frac{C}{n}\|u\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0.$$

Μάθημα 10ο ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 12/3/2018

$u \in H^1(I)$ $\exists\ \tilde{u} \in C(\bar{I}) : \tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_x^y u'(t)\,dt$, $x, y \in \bar{I}$, $u = \tilde{u}$ σχεδόν παντού στο I.

Θεώρημα Sobolev

Υπάρχει σταθερά $C = C(\mu(I)) < \infty$ (έστω και αν $\mu(I) = +\infty$) τέτοια ώστε:

$\sup_{x \in \bar{I}} |\tilde{u}(x)| \leq C \|u\|_{H^1(I)}$ $\forall\ u \in H^1(I)$

Απόδειξη:

Για πεπερασμένο διάστημα $I = (\alpha, \beta)$, $u \in H^1(I)$

$\tilde{u}(x) = \tilde{u}(y) + \int_x^y u'(t)dt$, $x, y \in \bar{I}$. Σταθεροποιούμε το $y \in \bar{I}$

$|\tilde{u}(x)| \leq |\tilde{u}(y)| + \int_\alpha^\beta |u'(t)|dt \overset{CS}{\leq} |\tilde{u}(y)| + \left(\int_\alpha^\beta 1^2 dt\right)^{1/2}\left(\int_\alpha^\beta |u'|^2 dt\right)^{1/2} = |\tilde{u}(y)| + \sqrt{\beta - \alpha}\, \|u'\|$

Παίρνοντας το max του αριστερού μέλους

$\max_{\alpha \leq x \leq \beta} |\tilde{u}(x)| \leq |\tilde{u}(y)| + \sqrt{\beta - \alpha}\, \|u'\|$ $\forall\ y \in \bar{I}$, ολοκληρώνω ως προς y στο (α, β)

$(\beta - \alpha) \max_{x \in \bar{I}} |\tilde{u}(x)| \leq \int_\alpha^\beta |\tilde{u}(y)|dy + (\beta - \alpha)^{3/2} \|u'\|$

Μπορώ να αντικαταστήσω το $\int_\alpha^\beta |\tilde{u}(y)|dy$ με $\int_\alpha^\beta |u(y)|dy$, αφού $\tilde{u} = u$ σχεδόν παντού.

$(\beta - \alpha) \max_{x \in \bar{I}} |\tilde{u}(x)| \leq \left(\int_\alpha^\beta 1^2\right)^{1/2}\left(\int_\alpha^\beta u^2(y)\,dy\right)^{1/2} + (\beta - \alpha)^{3/2} \|u'\|$

$\lambda, \mu \geq 0$
$(\lambda + \mu)^2 \leq 2(\lambda^2 + \mu^2)$, $\lambda + \mu \leq \sqrt{2}\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}$

$(\beta - \alpha) \max |\tilde{u}| \leq (\beta - \alpha)^{1/2} \|u\| + (\beta - \alpha)^{3/2} \|u'\|$

$\max |\tilde{u}| \leq (\beta - \alpha)^{-1/2} \|u\| + (\beta - \alpha)^{1/2} \|u'\|$

$\leq \sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{\beta - \alpha} \|u\|^2 + (\beta - \alpha) \|u'\|} = \sqrt{2 \max\left(\frac{1}{\beta - \alpha}, \beta - \alpha\right)}\, \|u\|_1$

$\max_{\alpha \leq x \leq \beta} |\tilde{u}(x)| \leq C \|u\|_1$ $\forall\ u \in H^1(I)$, $I = (\alpha, \beta)$

Η απόδειξη δεν γενικεύεται για $\mu(I) = \infty$

Παρατηρήσεις

(α) Επειδή $u = \tilde{u}$ σχεδόν παντού στο I μπορώ να αντικαταστήσω το $\sup_{x \in \bar{I}} |\tilde{u}(x)|$ με το $\|u\|_{L^\infty(I)} = \|u\|_\infty$

$\|u\|_{L^\infty(I)} \leq C \|u\|_{H^1(I)}$ $\forall\ u \in H^1(I)$, $\|u\|_{L^\infty(I)} \neq \sup_{x \in I} |u(x)|$ ← δεν υπάρχει

Λέμε ότι η $f \in L^\infty(I)$, μετρήσιμη αν $\exists\ C$ τέτοιο ώστε $|f(x)| \leq C$ σχεδόν παντού στο I
$\|f\|_{L^\infty(I)} = \inf\{C : |f(x)| \leq C$ σχεδόν παντού στο $I\}$. $(L^\infty(I), \|f\|_{L^\infty(I)})$ είναι χώρος Banach.

Αν f συνεχής και φραγμένη $\|f\|_{L^\infty(I)} = \sup_{x\in I}|f(x)| < \infty$

εμφύτευση

(β) $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ $\quad H^1(I) \subset L^\infty(I)$

$I: H^1 \to L^\infty$, συνεχής, $\exists C : \|Iu\|_{L^\infty(I)} \leq C\|u\|_{H^1(I)}$

$\mu(I) < \infty \quad H^1(I) \hookrightarrow C(\bar{I})$ ← συμπαγής

(γ) Ιδέα της απόδειξης του θεωρήματος Sobolev για γενικό διάστημα

• γ1 Αρκεί να δείξουμε το θεώρημα όταν $I = \mathbb{R}$

Έστω ότι έχει αποδειχθεί στο $\mathbb{R}$, δηλαδή $\exists C$ τέτοια ώστε $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_{Sob\mathbb{R}}\|u\|_{H^1(\mathbb{R})}, \forall u \in H^1(\mathbb{R})$

$u \in H^1(I)$ και $Eu \in H^1(\mathbb{R})$ η επέκταση, ας θεωρήσω

$\|u\|_{L^\infty(I)} = \|Eu\|_{L^\infty(I)} \leq \|Eu\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq C_{Sob\mathbb{R}}\|Eu\|_{H^1(\mathbb{R})} \leq C_{Sob\mathbb{R}}\, C_{ext}\|u\|_{H^1(I)}$

Η επέκταση είναι φραγμένη, άρα $\exists C_{ext} = C_1 + C_2/\mu(I)$

• γ2 Απόδειξη όταν $v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ $\quad 2\lambda\mu \leq \lambda^2 + \mu^2$

$v^2(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{d}{dt}(v^2)\,dt = 2\int_{-\infty}^{x} v\cdot v' \leq 2\int_{-\infty}^{\infty}|v||v'| \leq \int_{\mathbb{R}} v^2 + \int_{\mathbb{R}}(v')^2 = \|v\|^2_{H^1(\mathbb{R})}$

$\sup_{x\in\mathbb{R}}|v(x)| \leq \|v\|_{H^1(\mathbb{R})} \quad \forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R})$

• γ3 $u \in H^1(\mathbb{R})$ $\exists u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}) : u_n \xrightarrow[H^1(\mathbb{R})]{} u$, $n \to \infty$ $\exists$ υπακολουθία $(v_n) \subset (u_n)$

τέτοια ώστε $v_n \xrightarrow[L^\infty(\mathbb{R})]{} u$

$\|u_n\|_\infty \leq \|u_n\|_{H^1(\mathbb{R})}$

$\downarrow ?? \qquad \downarrow$

$\|u\|_\infty \qquad \|u\|_{H^1(\mathbb{R})}$

$\|u\|_\infty \leq C\|u\|_{H^1} \quad \forall u \in H^1$, έστω C^* = η μικρότερη δυνατή σταθερά για κάποιο I

$I = \mathbb{R}$, $C^*_{\mathbb{R}} = 1/\sqrt{2}$

$I = (0,\alpha)$ $\quad C^*_I = 1/\sqrt{\tanh\alpha}$, λαμβάνεται για $u = \cosh x$.

Θεώρημα: Ο $H^1(I)$ είναι άλγεβρα. Δηλαδή $u, v \in H^1(I) \Rightarrow u\cdot v \in H^1(I)$.

Επίσης $(u\cdot v)' = u'v + u\cdot v'$ και $\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv'$ $\forall u, v \in H^1(I)$, $x, y \in I$

Παρατήρηση: $u, v \in L^2(I) \not\Rightarrow uv \in L^2(I)$ (ο L^2 δεν είναι άλγεβρα, $I = (0,1)$, $u = v = x^{-1/4}$)

αν όμως $u \in L^\infty \cap L^2$, $v \in L^2 \Rightarrow u\cdot v \in L^2$

$\|uv\|_{L^2(I)} \leq \|u\|_{L^\infty(I)}\cdot\|v\|_{L^2(I)}$

Απόδειξη:

$u \cdot v \in L^2$?? Προφανώς. $u \in H^1 \Rightarrow u \in L^\infty$ από Sobolev $\|uv\|_{L^2} \le \|u\|_{L^\infty} \|v\|_{L^2} < \infty$

$\underset{L^2}{u'}\underset{H^1}{v} + \underset{H^1}{u}\underset{L^2}{v'} \in L^2$?? Ναι

$u, v \in H^1(I)$ $\exists\, u_n \in C^\infty(\bar{I})$, $v_n \in C^\infty(\bar{I})$, $u_n \xrightarrow{H_1} u$, $v_n \xrightarrow{H_1} v$

Θα δείξω ότι $uv \in H^1$ και $u_n v_n \xrightarrow{H^1} uv$

$u_n v_n \xrightarrow[L^2]{?} uv$

$\|u_n v_n - uv\|_{L^2} \le \|u_n v_n - u v_n\|_{L^2} + \|u v_n - uv\|_{L^2} \le \|v_n(u_n - u)\|_{L^2} + \|u(v_n - v)\|_{L^2}$

$$\le \underbrace{\|v_n\|_\infty}_{\text{φραγμένη}} \underbrace{\|u_n - u\|_{L^2}}_{0} + \underbrace{\|u\|_\infty}_{\text{φραγμένη}} \underbrace{\|v_n - v\|_{L^2}}_{0} \longrightarrow 0$$

$\|v_n - v\| \le C\, \|v_n - v\| \to 0$, $v_n \xrightarrow{L} v$, $\|v_n\|_\infty \to \|v\|_\infty \le C \|v\|_{H^1}$

μπορώ να παραγωγίσω γιατί u_n, v_n ομαλές συναρτήσεις (C^∞)

$(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n'$ Θα δείξω ότι $(u_n v_n)' = u_n' v_n + u_n v_n' \xrightarrow{L^2} u'v + uv'$

$$\|u_n' v_n - u'v\|_{L^2} \le \|u_n' v_n - u' v_n\| + \|u' v_n - u'v\| \le \overset{\text{φραγμένο}}{\|v_n\|_\infty} \overset{0}{\|u_n' - u'\|} + \overset{0}{\|v_n - v\|_\infty} \overset{\text{φραγμένο}}{\|u'\|} \longrightarrow 0$$

$\varphi_n = u_n v_n \in C^\infty(\bar{I})$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n &\xrightarrow{L^2} uv \\ \varphi_n' &\xrightarrow{L_2} u'v + uv' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\varphi_n \text{ Cauchy στον } H^1 : \exists\, w \in H^1 \\ &\varphi_n \xrightarrow{H^1} w \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n &\to w \in L^2 \\ \varphi_n' &\to w' \in L^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &w = uv \quad \text{άρα } uv \in H^1 \\ &w' = u'v + uv' = (uv)' \end{aligned}$$

$u, v \in H^1$ $\quad \int_y^x (u,v)' = (\widetilde{uv})(x) - (\widetilde{uv})(y)$

$\int_y^x u'v + uv' =$ $\quad$ $= u(x)v(x) - u(y)v(y)$

Παρατήρηση: Εφαρμογή Sobolev στην ευθεία

$u \in H^1(\mathbb{R})$ $\quad \lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$ $\quad$ δεν ξέρω αν μια συνάρτηση έχει όριο στο L^2

$\exists\, u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ τέτοιο ώστε $u_n \xrightarrow[H^1(\mathbb{R})]{} u$ από πυκνό $\|u_n - u\|_\infty \le C_{Sob}(\mathbb{R})\, \|u_n - u\|_{H^1(\mathbb{R})} \xrightarrow{\text{Sobolev}} 0$

Άρα $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)-\tilde{u}(x)| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\forall\, \varepsilon>0 \ \exists\, N=N(\varepsilon)$, $n\geq N$ τέτοιο ώστε $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)-\tilde{u}(x)| \leq \varepsilon$

$\forall\, \varepsilon>0 \ \exists\, N=N(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_N(x)-\tilde{u}(x)| \leq \varepsilon$ αλλά $u_N(x)\in C_c^\infty(\mathbb{R})$ άρα

$\exists\, M=M(N)$ τέτοιο ώστε $u_n(x)=0$ αν $|x|\geq M$

$\forall\, \varepsilon>0 \ \exists\, M$ τέτοιο ώστε $\sup_{x\in\mathbb{R}} |\tilde{u}(x)| \leq \varepsilon$

$\tilde{u}(x)\to 0 \qquad |x|\to\infty$

Μάθημα 11ο   ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ   13/3/2018

$H^m(I)$ m ακέραιος ≥ 1

$u \in C^m(I)$, $\varphi \in C_c^\infty(I)$ $\int_I u\varphi' = -\int_I u'\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I)$

$\int_I u\varphi'' = [\cancel{u\varphi'}]_\lambda^\mu$ άκρα του supp φ $\quad -\int u'\varphi' = \int u''\varphi$

⋮

$\int_I u\varphi^{(m)} = (-1)^m \int u^{(m)}\varphi$

$H^m(I) := \{u \in L^2(I) : \exists\, g_i \in L^2(I),\ i = 1,2,\dots,m$ τέτοια ώστε $\int_I u\varphi^{(i)} = (-1)^i \int_I g_i\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(I)\}$

$m \geq 1 \quad H^m \subset H^1 \subset L^2$

Παρατηρήσεις

1) $\forall i$ g_i είναι μοναδικό. Συμβολίζουμε $g_i = u^{(i)}$, ασθενής ή γενικευμένη παράγωγος τάξης i

2) πχ $H^2 = \{u \in L^2 : \exists\, g_1, g_2 \in L^2 : \int u\varphi' = -\int g_1\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty, \int u\varphi'' = \int g_2\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty\}$

Ερώτημα: Είναι η $g_1 \in H^1$ και ισχύει ότι $g_1' = g_2$;

$\varphi \in C_c^\infty(I)$

$\int_I g_2\varphi = \int_I u\varphi'' = \int_\lambda^\mu u\varphi'' = [\cancel{u\varphi'}]_\lambda^\mu - \int_\lambda^\mu u'\varphi' = -\int_I u'\varphi' = -\int g_1\varphi'$

$\text{supp}\,\varphi = [\lambda, \mu] \subset I \quad , \quad u \in H^1$

$\int_I g_1\varphi' = -\int_I g_2\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty$: $g_1 \in H^1$ και $g_1' = g_2$

$g_1 = u'$, $u' \in H^1$

$g_2 = u''$, $(u')' = u''$

$H^2 = \{u \in L^2 : \underset{g_1}{\overset{\shortparallel}{u'}}, \underset{g_2}{\overset{\shortparallel}{u''}} \in L^2\}$

$H^2 = \{u \in H^1 : u' \in H^1\}$

$H^m = \{u \in L^2 : u', u'', \dots, u^{(m)} \in L^2\}$

$= \{u \in H^1 : u', u'', \dots, u^{(m-1)} \in H^1\}$

$\vdots$

$= \{u \in H^{m-1} : u^{(m)} \in L^2\}$

Ιδιότητες

(α) $u \in C^m(I)$ η γενικευμένη και η κλασσική παράγωγος $u^{(i)}$ συμπίπτει $i=1,2,\dots,m$
$I=(\alpha,\beta)$ και I όχι πεπερασμένο $u \in C^m \cap L^2$

(β) $u,v \in H^m$ $\quad (u,v)_m = \sum_{i=0}^{m} (u^{(i)}, v^{(i)})$ εσωτερικό γινόμενο του L^2
• $m=2$ $\quad (u,v)_2 = (u,v) + (u',v') + (u'',v'')$
$\|u\|_m = \sqrt{(u,u)_m}$
$H^m, (\cdot,\cdot)_m$ είναι χώρος Hilbert.

$C^m \cap L^2 \subset H^m \subsetneq H^{m-1} \subsetneq H^{m-2} \subsetneq \dots \subsetneq H^1 \subsetneq L^2$

(γ) $u \in H^m$ $\exists\, \tilde{u} \in C^{m-1}$ $\quad u = \tilde{u}$ σχεδόν παντού στο I

(δ) Πυκνότητα Αν $u \in H^m$ τότε $\exists\, \varphi_n \in C^\infty(\bar{I})$: $\varphi_n \xrightarrow[\|\cdot\|_m]{} u$
$C^\infty(\bar{I}) = C_c^\infty(\mathbb{R})|_I$

(ε) Sobolev στον $H^m(I)$ $\quad u \in H^m(I) \Rightarrow u^{(j)} \in L^\infty(I)$ $j=0,1,\dots,m-1$ και
$\exists\ C_m = C_m(\mu(I)) < \infty$ τέτοια ώστε
$\sum_{j=0}^{m-1} \|u^{(j)}\|_{L^\infty(I)} \le C_m \|u\|_m \quad \forall\ u \in H^m$
$\hookrightarrow \|\tilde{u}^{(j)}\|_{C(\bar{I})}$ $\qquad u^{(0)} = u$

Τύπος Leibniz

(στ) $u,v \in H^m \Rightarrow u \cdot v \in H^m$ και $(uv)^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} u^{(j)} \cdot v^{(m-j)}$

(ζ) Ανισότητες τύπων παρεμβολής
$u \in H^m$ $\quad \|u^{(j)}\| < C\|u^{(m)}\| + \tilde{C}\|u\|$ $\qquad 1 \le j \le m-1$
$u \in H^m$: $\forall\ \varepsilon > 0$. $\exists\ C_\varepsilon > 0$: $\underset{1\le j\le m-1}{\|u^{(j)}\|} \le \varepsilon \|u\|^m + C_\varepsilon \|u\|$ $\quad \forall\, u \in H^m$

Ορισμός: $H^{0\,1}(I) \equiv H_0^1(I) := \overline{C_c^\infty(I)}^{\|\cdot\|_1}$ (η πλήρωση με την $\|\cdot\|_1$)
$\forall\ u \in H^{0\,1}(I)$ $\exists$ $\varphi_n \in C_c^\infty(I)$ τέτοια ώστε $\varphi_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} u$

Υπενθύμιση: $L^2(I) = \overline{C_c^\infty(I)}^{\|\cdot\|}$, $H^1(I) = \overline{C^\infty(\bar{I})}^{\|\cdot\|_1}$ $\rightsquigarrow \psi \in C^\infty(\bar{I})$ αν $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$: $\psi = \varphi|_I$

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 13/3/2018

H^{01} = κλειστός υπόχωρος του H^1 και H^{01}, $(\cdot,\cdot)_1$ είναι χώρος Hilbert

Στην ειδική περίπτωση που $I=\mathbb{R}$ τότε $H^{01}(\mathbb{R}) = H^1(\mathbb{R}) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R})}^{\|\cdot\|_1}$

αν $I \subsetneq \mathbb{R}$ $\quad H^{01} \subsetneq H^1$

$I=(\alpha,\beta)$

$u=e^x$ ή $u=e^{-x}$ ή $u=c_1e^x+c_2e^{-x}$ λύσεις της $u''-u=0$

$0=\int_\alpha^\beta (u''-u)\varphi = \int_\alpha^\beta u''\varphi - \int_\alpha^\beta u\varphi = -\int_\alpha^\beta u'\varphi' - \int_\alpha^\beta u\varphi = -(u,\varphi)_1$

$\varphi\in C_c^\infty(\alpha,\beta)$ $\qquad (u,\varphi)_1=0 \quad \forall \varphi\in C_c^\infty(\alpha,\beta)$

αν $u\in H^{01}$ τότε $u=0$ άρα $u\notin H^{01}$ αλλά $u\in H^1$

$H^{01}(\alpha,\beta)\subsetneq H^1(\alpha,\beta)$

Θεώρημα: $H^{01}(I)=\{u\in H^1(I): u|_{\partial I}=0\}$. $u\in H^{01}(I) \Leftrightarrow u\in H^1(I)$ και $u|_{\partial I}=0$

Απόδειξη:

(⇒) $u\in H^{01}(I) \Rightarrow u\in H^1$ και $u(\alpha)=u(\beta)=0$

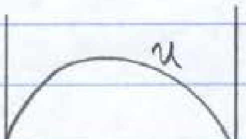
$H^{01}\subset H^1$, $u\in H^{01}(I)$ $\exists\, \varphi_n \in C_c^\infty(I): \varphi_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} u$

$\sup_{x\in I}|\varphi_n(x)-\tilde u(x)| \le C_{sob}\|\varphi_n-u\|_1 \longrightarrow 0$, άρα $\sup_{x\in I}|\varphi_n(x)-\tilde u(x)|\longrightarrow 0$, $n\longrightarrow\infty$

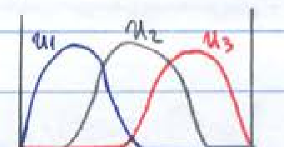
$x=\alpha$, τότε $|\varphi_n(\alpha)-\tilde u(\alpha)| \le \sup_{x\in I}|\varphi_n(x)-\tilde u(x)| \longrightarrow 0 \Rightarrow u(\alpha)=\tilde u(\alpha)=0$

(⇐) Ιδέα της απόδειξης

$u\in H^1(I)$ και $u(\alpha)=u(\beta) \Rightarrow u\in H^{01}(I)$, δηλαδή $\exists\, \varphi_n\in C_c^\infty(I): \varphi_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} u$



Το γράφω σαν άθροισμα 3 συναρτήσεων.

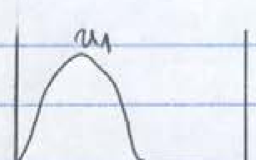


$\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3 : \sum \varphi_i = 1$

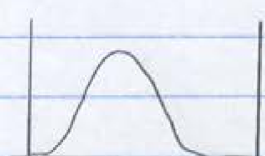
$u_1=\varphi_1 u$ $\qquad \rho_n * u_2 \rightsquigarrow \tilde u \in H^{01}$

$u_2=\varphi_2 \cdot u$ $\qquad$ έχει συμπαγή φορέα

$u_3=\varphi_3 u$



$T_h u(x) = u(x-h)$



$\rho_n * (T_h u)$

Ανισότητα Poincare - Friedrich

$b-\alpha < \infty$ $\exists$ $C_I = C_I(b-\alpha)$ τέτοια ώστε $(\|u'\| \le) \|u\|_1 \le C_I \|u'\|$ $\forall u \in H^{01}(I)$

Απόδειξη:

Έστω $u \in H^{01}(I)$, $u(\alpha)=0$

$u(x) = \int_\alpha^x u'(t)\,dt$

$|u(x)| \le \int_\alpha^b 1\,|\varphi'(t)|\,dt \le \sqrt{b-\alpha}\sqrt{\int_\alpha^b (u')^2} = \sqrt{b-\alpha}\,\|u'\|$

$u^2(x) \le (b-\alpha)\|u'\|^2$

$\int_\alpha^b u^2(x)\,dx \le (b-\alpha)^2\|u'\|^2$

$\|u\|^2 \le (b-\alpha)^2\|u'\|^2 \quad \forall u \in H^{01}(\alpha,b)$ (Η καλύτερη σταθερά είναι $(b-\alpha)^2/\pi^2$)

Προσθέτω $\|u'\|^2$ και στα 2 μέλη $\Longrightarrow$ $\|u\|_1^2 \le (1+(b-\alpha)^2)\|u'\|^2$

$C_I = \sqrt{1+(b-\alpha)^2}$

$H^{0m}(I) = \overline{C_c^\infty(I)}^{\|\cdot\|_m} \subsetneq H^m(I)$

$H^{0m}(I) = \{u \in H^m : u = u' = \dots = u^{(m-1)} = 0 \text{ στο } \partial I\}$

$H^{02}(I) = \{u \in H^2 : u = u' = 0 \text{ στο } \partial I\}$

$* \; H^2 \cap H^{01} = \{u \in H^2 : u = 0 \text{ στο } \partial I\}$

Μάθημα 12ο ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 19/3/2018

Προβλήματα Συνοριακών Συνθηκών 2 Σημείων

ψάχνω $u = u(x)$, $x \in \bar{I}$, $I = (\alpha, \beta)$

$$(*)\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{στο } I \quad (\Delta E) \\ u(\alpha) = u(\beta) = 0 & (\Sigma\Sigma) \end{cases}$$ (πρόβλημα συνοριακών συνθηκών)

ομογενείς σσ Dirichlet

$p(x): p \in C^1(\bar{I})$ $\quad p(x) \geq \alpha > 0 \quad x \in \bar{I}$

$q(x): q \in C(\bar{I})$ $\quad q(x) \geq 0 \quad x \in \bar{I}$

$f(x): f \in C(\bar{I})$ ή $f \in L^2(\bar{I})$

Ορισμός: $f \in C(\bar{I})$, η u είναι κλασσική λύση του $(*)$, αν $u \in C^2(\bar{I})$ και πληροί την (ΔE) $\forall x \in I$ και τις $(\Sigma\Sigma)$

Ορισμός: $f \in C^2(I)$ η u είναι ασθενής ή γενικευμένη λύση του $(*)$, αν $u \in H^{01}(I)$ και πληροί την $\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I f v \quad \forall v \in H^{01}(I)$ (ασθενής μορφή της (ΔE))

$\left|\int_I pu'v'\right| \leq p_{max} \int |u'v'| \leq p_{max} \|u'\| \|v'\|$

$\left|\int_I quv\right| \leq q_{max} \int |uv| \leq q_{max} \|u\| \|v\|$

"Μεταβολική Μέθοδος"

4 βήματα

1 ⟶ 2 ⟶ 3 ⟶ 4

1. Η κλασσική λύση είναι και ασθενής
2. Ύπαρξη και μοναδικότητα ασθενής λύση $\in H^{01}$ (Lax-Milgram)
3. Ομαλότητα της ασθενής λύσης
4. Ύπαρξη και μοναδικότητα της κλασσικής λύσης

1 Έστω $f \in C(\bar{I})$, u κλασσική λύση, τότε η u είναι και ασθενής λύση.

Η $u \in C^2(\bar{I}) \Rightarrow u \in H^{01}$ ($u \in H^1$ και u πληροί τις σσ)

$-(pu')' + qu = f \quad x \in I$ πολλαπλασιάζω με v και ολοκληρώνω πάνω στο I

$-\int_I (pu')'v + \int_I quv = \int_I f \cdot v \quad \forall v \in H^{01}$

$v \to H^{01}$

$pu' \in C^1(I) \in H^1$

$\int w'v,\ w\in H^1,\ v\in H^{01},\ w=pu'\in H^1$

Μπορώ να ολοκληρώσω κατά παράγοντες $\int_\alpha^\beta w'v=[wv]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta wv'$

$-[pu'v]_\alpha^\beta+\int_I pu'v'+\int_I quv=\int_I fv$ $\qquad [pu'v]_\alpha^\beta=p(\beta)u'(\beta)v(\beta)-p(\alpha)u'(\alpha)v(\alpha)=0$

αφού $v(\alpha)=v(\beta)=0$ αφού $v\in H^{01}$

② Έστω $f\in L^2(I)$ τότε $\exists!\ u\in H^{01}$ ασθενής λύση του (*), επιπλέον $\|u\|_1\le C\cdot\|f\|$

Ορίζω $B(v,w):=\int_I(pv'w'+qvw)\quad, v,w\in H^{01}$

$F(v):=\int_I fv\quad, v\in H^{01}$

$B(\cdot,\cdot)$ διγραμμική μορφή στον $H^{01}\times H^{01}$

$F(\cdot)$ γραμμικό συναρτησιακό στο H^{01}

Πάω να δω τις προϋποθέσεις του Θ Lax-Milgram

(i) $|B(v,w)|\overset{??}{\le} C_1\|v\|_1\|w\|_1\quad\forall\ v,w\in H^{01}$

$|\int(pv'w'+qvw)|\le p_{max}\int|v'w'|+q_{max}\int|vw|\overset{CS}{\le}p_{max}\|v'\|\|w'\|+q_{max}\|v\|\|w\|$

$\le\underbrace{(p_{max}+q_{max})}_{C_1(p,q)}\underbrace{\left(\|v'\|\|w'\|+\|v\|\|w\|\right)}_{\substack{\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2\\ \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2\le\sqrt{\alpha_1^2+\alpha_2^2}\sqrt{\beta_1^2+\beta_2^2}}}\le C_1\sqrt{\|v'\|^2+\|v\|^2}\cdot\sqrt{\|w'\|^2+\|w\|^2}=C_1\cdot\|v\|_1\|w\|_1\ \forall v,w\in H^{01}$

(ii) $\exists\ C_2>0: B(v,v)\ge C_2\|v\|_1^2\quad\forall\ v\in H^{01}\qquad p\ge\alpha>0,\ q\ge0$

$B(v,v)=\int_I p(v')^2+\int_I qv^2\ \ge\alpha\|v'\|^2\ \ge\frac{\alpha}{C_*^2}\|v\|_1^2\quad\forall\ v\in H^{01}$

Από ανισότητα Poincare-Friedrich

$\|v\|_1\le C_*\|v'\|\quad\forall\ v\in H^{01}\quad\exists\ C_*=C_*(\beta-\alpha)\quad,\ \|v'\|^2\ge\frac{1}{C_*^2}\|v\|_1^2$

Τελικά $\quad C_2=\alpha/C_*^2$

(iii) $|F(v)|=|\int_I fv|\le\|f\|\cdot\|v\|\le\|f\|\,\|v\|_1\qquad\exists!\ u\in H^{01}\ B(u,v)=F(v)\quad\forall u\in H^{01}$

$\exists!$ ασθενής λύση και $\|u\|_1\le\frac{1}{C_2}\|f\|$

Παρατήρηση: 

Άρα υπάρχει το πολύ μια κλασσική λύση

③ Ομαλότητα της ασθενής λύσης

(α) ασθενής λύση $u\in H^2\cap H^{01}$

(β) Η (ΔΕ) ισχύει στο L^2

(γ) $\exists\ c>0: \|u\|_2\le C\cdot\|f\|$ (ανισότητα ελλειπτικής ομαλότητα)

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 19/3/2018

$f \in L^2$: ασθενής λύση $u \in H^{01}$: $\int (pu'v' + quv) = \int fv \quad \forall v \in H^{01}$

$$B(u,v) = F(v)$$

$\int_I pu'v' = -\int_I (qu-f)v \quad \forall v \in H^{01}$

$v \in L^2$ τότε $u \in H^1$, $\exists g \in L^2$

$\int_I pu'\varphi' = -\int_I \underbrace{(qu-f)}_{\in L^2}\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^1(I)$ (ή $\varphi \in C_c^\infty(I)$) $\quad \int u\varphi' = -\int g\varphi \; \forall \varphi \in C_c^1(I)$

$\underbrace{p \in C^1 \; u' \in L^2}_{pu' \in L^2}$ $\quad g = u'$

$\Rightarrow pu' \in H^1$ και $(pu')' = qu - f$

↳ "Η (ΔΕ) ισχύει στον L^2" $-(pu')' + qu = f$ Δείξαμε το (β)

(α) $u' = \frac{1}{p_{\in C^1 \subset H^1}}(pu') \in H^1$ όμως H^1 άλγεβρα $\Rightarrow u' \in H^1$, $\exists u'' \in L^2 \Rightarrow u \in H^2 \cap H^{01}$

(γ) $-(pu')' + qu = f$ στον L^2, $p \in C^1 \Rightarrow \in H^1$, $u' \in H^1$

Μπορώ να παραγωγίσω $u, w \in H^1 \Rightarrow (uw)' = u'w + uw'$

$-p'u' - pu'' + qu = f \iff -pu'' = p'u' - qu + f$

$\alpha\|u''\| \le \|pu''\| \le \|p'u'\| + \|qu\| + \|f\| \le \|p'\|_\infty \|u''\| + \|q\|_\infty \|u\| + \|f\|$

$\underset{\|u\|_1 \le C\|f\|}{\overset{LM}{\le}} C\|f\| + C'\|f\| + \|f\| = (C + C' + 1)\|f\|$

$\|u''\| \le \frac{\tilde{C}}{\alpha}\|f\|$ | $\|u''\|^2 + \|u\|_1^2 \le C\|f\|^2$

$\|u\|_1 \le \frac{1}{C_2}\|f\|$ | $\|u\|_2 \le C\|f\|$

③ $f \in C(\bar{I}) \Rightarrow u$ ασθενής λύση $\in C^2(\bar{I})$

$u \in H^2 \Rightarrow u \in C^1(I)$ από Sobolev

$-f \in C(I)$ επειδή $-pu'' = \underset{\in L^2}{pu'} - \underset{\in C}{qu} + \underset{\in C}{f}$

$u \in C^2(I)$ $\quad u'' = \frac{1}{p}(pu' - qu + f)$

④ ✓

Μάθημα 13ο: ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε 20/3/2018

$u \in H^{01}(I)$, $I=(\alpha,\beta)$
$B(u,v) = (f,v) \quad \forall\ v \in H^{01}$
$B(v,w) = \int_I (p v' w' + q v w) \qquad (f,v) = \int_I f v$
αν $p \in L^\infty(I)$ $\quad f \in L^2 \quad p(x) \geq \alpha > 0$ σχεδόν παντού στο I
$\quad q \in L^\infty(I) \quad , q(x) \geq 0$ σχεδόν παντού
Τότε πληρούνται οι ιδιότητες του Lax-Milgram. Δηλαδή:
(i) $B(v,w) \leq C_1 \|v\|_1 \|w\|_1 \quad \forall\ v,w \in H^{01}$
(ii) $B(v,v) \geq C_2 \|v\|_1^2 \quad \forall\ v \in H^{01}$

$\forall\ v \in H^{01} \quad B(u,v) = F(v) \quad$ πχ $v(\gamma)$, $\gamma \in (\alpha,\beta)$
F φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό στο H^{01} $\qquad |v(\gamma)| \leq C_{Sob} \|v\|_1 \ \forall\ v \in H^{01}\ \forall \gamma$

Συνοριακές Συνθήκες Neumann

$-(pu')' + qu = f \qquad x \in (\alpha,\beta) = I$
$u'(\alpha) = 0$, $u'(\beta) = 0$
$p \in C^1(\bar{I})$, $p(x) \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in \bar{I}$
$q \in C^1(\bar{I})$, $q(x) \geq \rho > 0 \quad \forall x \in \bar{I}$

Ορισμός: Κλασσική λύση ($f \in C(\bar{I})$), $u \in C^2(I)$ τέτοια ώστε να πληροί την Δ.Ε και τις σ.σ με την συνήθη έννοια

Ορισμός: Ασθενής λύση $u \in H^1(I)$ τέτοια ώστε $\int_I (pu'v' + quv) = \int_I f v \quad \forall v \in H^1$

① Αν u κλασσική λύση $=$ u ασθενής.
Πράγματι $\left.\begin{array}{l} -(pu')' + qu = f \\ u'(\alpha) = u'(\beta) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \int_I -(pu')'v + \int_I qv = \int_I f v \quad \forall\ v \in H^1$

$\rightarrow -[pu'v]_\alpha^\beta + \int_I pu'v' = p(\alpha)\cancel{u'(\beta)}^{0} + v(\beta) + p(\alpha)\cancel{u'(\alpha)}^{0} v(\alpha) + \int_I p u' v'$
Άρα $B(u,v) = (f,v) = \int_I (pu'v' + quv) \ \forall\ v \in H^1$

② $\exists! \, u \in H^1 : \|u\|_1 \leq \frac{1}{C_2}\|f\|$

(i) $B(v,w) = \int p v' w' + q v w \quad , \quad w,v \in H^2 \Rightarrow |B(v,w)| \leq C_1 \|v_1\|\|w\|_1 \;\; \forall v,w \in H^1$

$C_1 = \max p + \max q$

(ii) $B(v,v) = \int p(v')^2 + q v^2 \geq \alpha\|v'\|^2 + \beta\|v\|^2 \geq \min(\alpha,\beta)\left(\|v'\|^2 + \|v\|^2\right) = C_2\|v\|_1^2$

③ Ομαλότητα Ασθενούς Λύσης

I) (α) $u \in H^2$

(β) H ΔΕ ισχύει στον L_2

(γ) $\|u\|_2 \leq C\|f\|$

(δ) $u'(\alpha)=0 \, , \, u'(\beta)=0$

$\Big\} \quad f \in L_2$

II) $u \in C^2(\bar{I}) \quad f \in C(\bar{I})$

Για τα α, β, γ βλέπω αντίστοιχη περίπτωση στο Πυθαγόρειο Θεώρημα δηλαδή περίπτωση Dirichlet H^1

δ) $\int \underbrace{p u'}_{\in H^1} \underbrace{v'}_{\in H^1} + q u v = \int f v \;\; \forall v \in H^1$ (έχω δείξει ότι $u \in H^2$)

Άρα $p u' v' \in H^1$ (Γενικά $\int w v'$ με $w \in H^1, v \in H^1$ άρα $uv' \in H^1$, $\int w v' = [wv]_\alpha^\beta - \int_I w' v$)

$\Rightarrow [p u' v]_\alpha^\beta - \int_I (p u')' v + \int_I q v = \int_I f v \quad \forall v \in H^1 \Rightarrow$

$p(\beta)u'(\beta)v(\beta) - p(\alpha)u'(\alpha)v(\alpha) + \int_I \left(-(p u')' + q u - f\right) v =$

$= p(\beta)u'(\beta)v(\beta) - p(\alpha)u'(\alpha)v(\alpha) = 0$

Για $p(\beta) > 0$ και $p(\alpha) > 0$

Για $v = \beta - x \qquad v(\beta) = 0 \quad \Rightarrow p(a)u'(\alpha)v(\alpha) = 0 \Rightarrow u'(\alpha) = 0$

Για $v = x - \alpha \qquad v(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow p(\beta)u'(\beta)v(\beta) = 0 \Rightarrow u'(\beta) = 0$

II) $u \in H^2 \quad , \quad -(\underbrace{p}_{\in C^1} \underbrace{u'}_{\in H^1})' + q u = \underbrace{f}_{\in L^2} \Rightarrow -p' u' - p u'' + q u = f$

$\Rightarrow -p u'' = f - q u + p' u'$ (Το 2º μέλος είναι συνεχής συνάρτηση και για αυτό χρειάζομαι $f \in C$)

$\Rightarrow u'' = f/p$ συνεχής $\Rightarrow u'' \in C \Rightarrow u \in C^2$

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ   20/3/2018

Κεφάλαιο 3:
Αριθμητικές Μέθοδοι Galerkin - Πεπερασμένων Στοιχείων

$-(pu')' + qu = f$

$u(\alpha) = u(b) = 0$

$u \in H^{01}$ $\quad B(u,v) = (f,v)$ $\quad \forall\, v \in H^{01}$, u ασθενής λύση, $u \in H^2 \cap H^{01}$

$S_h \subset H^{01}(I)$ πεπερασμένης διάστασης

Διακριτό Πρόβλημα

Ζητώ $u_h \in S_h$ τέτοιο ώστε $B(u_h, \varphi) = (f, \varphi)$ $\forall\, \varphi \in S_h$ $\quad \exists!\, u \in S_h$

$\inf_{x \in S_h} \|u - x\|_1 \le \|u - u_h\|_1 \le \frac{C_1}{C_2} \inf_{x \in S_h} \|u - x\|_1$ (Σημαντικό: $B(u - u_h, \varphi) = 0$ $\forall \varphi \in S_h$, ορθογωνιότητα)

Αν $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ βάση του S_h τότε $u_h = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i$, οπότε ψάχνω να βρω το $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_N \end{pmatrix}$

$\underset{N\times N}{A} \cdot \underset{N\times 1}{C} = \underset{N\times 1}{F}$

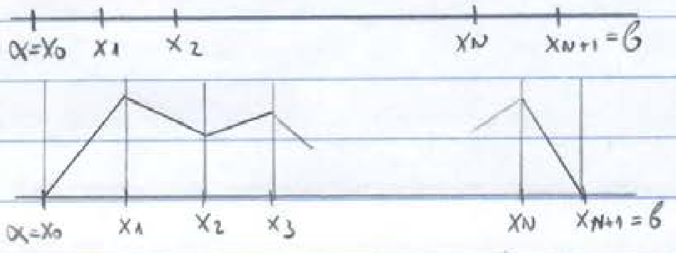
$A_{ij} = B(\varphi_j, \varphi_i) = B(\varphi_i, \varphi_j)$ $\quad 1 \le i,j \le N$ (συμμετρικός + θετικά ορισμένος)

$F_i = (f, \varphi_i)$

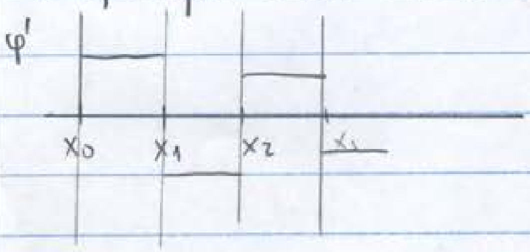
- Πρέπει να διαλέξω με τέτοιο τρόπο το S_h ώστε $\inf \|u - x\|$ να είναι πολύ μικρό δηλαδή το σφάλμα να είναι μικρό
- Αν έπαιρνα για βάση $S_h = \langle 1, x, x^2, \dots, x^N \rangle$ τότε
  $\int_0^1 x^i x^j = \int_0^1 x^{i+j} = 1/(i+j-1)$ πολύ κακός δείκτης κατάστασης

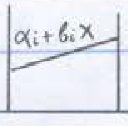
$h = \max(x_{i+1} - x_i)$

$S_h = \{ \varphi \in C([\alpha, b]),\ \varphi|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1,\ \varphi(\alpha) = \varphi(b) = 0 \}$



Το ερώτημα είναι $S_h \subset H^{01}$? και $\dim S_h = ?$



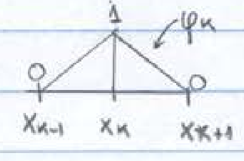


Άρα έχω $(N+1)\alpha_i$ και $(N+1) b_i$ άρα

$2(N+1) - N - 2 = N$

$-N$ λόγω των εσωτερικών σημείων και -2 λόγω των ΑΣ

Θα το αποδείξουμε



$supp\,\varphi_k = [x_{k-1}, x_{k+1}] \quad \forall \; k = 1, \ldots, N$

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}, & x \in [x_{k-1}, x_k] \\ \dfrac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k}, & x \in [x_k, x_{k+1}] \\ 0, & x \notin [x_{k-1}, x_{k+1}] \end{cases}$$

Απόδειξη ότι είναι βάση

$$\varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \; i \neq j \\ 1, & \alpha\nu \; i = j \end{cases}$$

(i) $\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ γραμμικά ανεξάρτητα $\sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x) = 0 \quad \forall \; x \in I$, $x = x_k$, $1 \leq k \leq N$

$\sum_{i=1}^{N} c_i \underbrace{\varphi_i(x_i)}_{\delta_{ik}} = 0$

$c_k = 0 \;\; \forall \; k \implies$ γραμμικά ανεξάρτητα

(ii) Παράγω τον χώρο

$\psi \in S_h$

$\psi(x) = \sum_{i=1}^{N} \psi(x_i) \varphi_i(x)$

$\psi(x)$ = κατά τμήματα γραμμική, συνεχής και για $x = x_k$ έχω $\psi(x_k)$

$\sum_{i=1}^{N} \psi(x_i) \varphi_i(x) = \sum \psi(x_i) \delta_{ik} = \psi(x_k) \implies \psi(x) = \sum \psi(x_i) \varphi_i(x)$

Άρα φ_i βάση του S_h.

Μάθημα 14º ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 26/3/2018

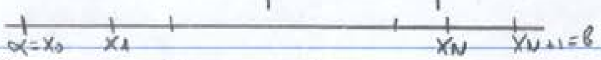
$-(pu')' + qu = f \quad , x \in (\alpha, \beta)$

$u(\alpha) = u(\beta) = 0$

ασθενής λύση $u \in H^2 \cap H^{01}$

$B(u,v) = (f,v) \quad \forall \; v \in H^{01}$

$B(u,w) = \int_\alpha^\beta (pu'w' + quw)$



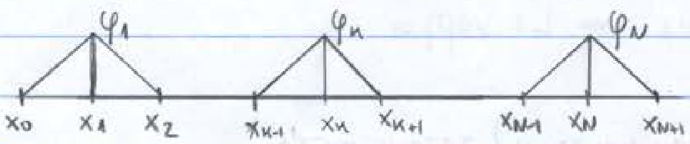
$h = \max(x_{i+1} - x_i)$

$u_h \cong u \qquad u_h \in S_h \subset H^{01}$

$S_h = \{ \varphi \in C[\alpha,\beta] \, , \, \varphi|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_1 \quad \varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0 \}$

$\dim S_h = N \qquad S_h \subset H^{01}$

$\{\varphi_j\}_{j=1}^N$



$\varphi_j \in S_h$

$\varphi_j(x_k) = \delta_{jk} \, , j,k = 1, \dots, N \qquad supp \, \varphi_j = [x_{j-1}, x_{j+1}]$

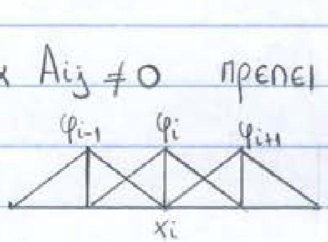
$B(u_h, \varphi) = (f, \varphi) \quad \forall \; \varphi \in S_h$

$u_h = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i \qquad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} \qquad AC = F.$

$A_{ij} = B(\varphi_j, \varphi_i) = \int_\alpha^\beta (p \varphi_i' \varphi_j' - q \varphi_i \varphi_j)$ ο A τριδιαγώνιος

$F_i = (f, \varphi_i) = \int_\alpha^\beta f \varphi_i$

Για $A_{ij} \neq 0$ πρέπει φ_i, φ_j να έχω μη μηδενικά.



$A_{i,i+1} \neq 0$

$A_{ii} \neq 0$

$A_{i,i-1} \neq 0$

A συμμετρικός θετικά ορισμένος και τριδιαγώνιος

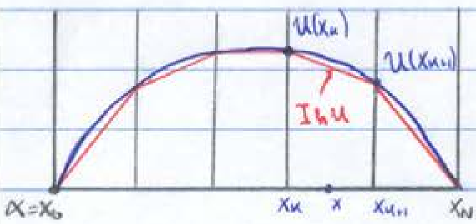
Λύνω το $AC = F$ με Cholesky για τριδιαγώνιο $O(N)$

$u_h \qquad B(u - u_h, \varphi) = 0 \qquad \forall \; \varphi \in S_h$

$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{C_1}{C_2} \inf_{x \in S_h} \|u - x\|_1 \qquad u \in H^2 \cap H^{01}$

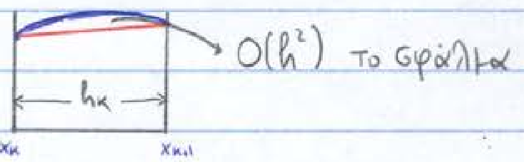
$I_h u \in S_h$: Παρεμβάλλουσα ή συνάρτηση παρεμβολής της u στο S_h

$(I_h)(x_i) = u(x_i) \quad i=1,\dots,N$



$u \in C(\bar{I}) \ , u(\alpha)=u(\beta)=0$

$$(I_h u)(x) = \sum_{k=1}^{N} u(x_k)\varphi_k(x)$$



$$\max_{x_k \le x \le x_{k+1}} |u(x) - I_h u(x)|$$

Δεν μπορώ να περιμένω καλύτερο σφάλμα από h^2

Αν $u \in H^2 \cap H^{01}$ τι μπορώ να πω για το $\|u - I_h u\|_1 \le ?$

Τι μπορώ να πω και για $\|u - I_h u\| \le ?$ με την L_2 νόρμα

Θεώρημα: $\exists\ C$ (ανεξάρτητη του διαμερισμού και του v) τέτοια ώστε

- $\|v - I_h v\| + h\|v' - (I_h v)'\| \le C h \|v'\| \quad \forall\ v \in H^{01}$
- $\|v - I_h v\| + h\|v' - (I_h v)'\| \le C h^2 \|v''\| \quad \forall\ v \in H^2 \cap H^{01}$

Λήμμα: (i) $v \in H^{01}$ $(v' - (I_h v)', \varphi') = 0 \quad \forall\ \varphi \in S_h$

(ii) $\|v - I_h v\| \le C h \|v' - (I_h v)'\|$

Απόδειξη.

(i) $$(v' - (I_h v)', \varphi') = \int_\alpha^\beta (v' - (I_h v)')\varphi' = \sum_{k=0}^{N} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (\underbrace{v' - (I_h v)'}_{w'})\varphi' = \qquad w = v - I_h v$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \Big\{ \big[\underbrace{\overbrace{(v - I_h v)}^{0}}_{v(x_k) = (I_h v)(x_k)} \varphi' \big]_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} (v - (I_h v)) \underbrace{\overbrace{\varphi''}^{0}}_{\varphi|_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathbb{P}_1} \Big\} = 0$$

(ii) $w(x) = \int_\lambda^x w'(t)\,dt \quad x \in (\lambda, \mu) \ , \ w(\lambda) = 0$

$w \in H^1(\lambda,\mu) \quad |w(x)| \le \int_\lambda^x |w'| \le \int_\lambda^\mu |w'| \le \sqrt{\mu - \lambda}\, \|w'\|_{L^2(\mu,\lambda)}$

$w^2(x) \le (\mu - \lambda)\|w'\|^2_{L^2(\mu,\lambda)} \quad , \|w\|_{L^2(\mu,\lambda)} \le (\mu - \lambda)\|w'\|_{L^2(\mu,\lambda)}$ P-F.

$$\|v - I_h v\|^2 = \sum_{k=0}^{N} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (v - I_h v)^2 \underset{\substack{w = v - I_h v \\ (\lambda,\mu) = [x_k, x_{k+1}]}}{\overset{PF}{\le}} \sum_{k=0}^{N} (x_{k+1} - x_k)^2 \int_{x_k}^{x_{k+1}} (v - I_h v)'^2$$

$$\le h^2 \sum_{k=0}^{N} \int_{x_k}^{x_{k+1}} ((v - I_h v)')^2 = h^2 \|v' - (I_h v)'\|^2$$

ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 26/3/2018

Απόδειξη Θεωρήματος

• $v \in H^{01}$ παίρνω την $\varphi = I_h v$

$(v' - (I_h v)', (I_h v)') = 0$

$\|v' - (I_h v)'\|^2 + \|(I_h v)'\|^2 = \|v'\|^2$

$\|v' - (I_h v)'\| \leq \|v'\|$

Από λήμμα $\|v - I_h v\| \leq h \|v' - (I_h v)'\| \leq h\|v'\|$

• $v \in H^2$ θα δείξω ότι $\|v' - (I_h v)'\| \leq h\|v''\|$

$$\|v' - (I_h v)'\|^2 = (v' - (I_h v)', v' - (I_h v)') = (v' - (I_h v)', v') - \cancel{(v' - (I_h v)', \underbrace{(I_h v)'}_{\varphi})}^{0}$$

$$= \int_\alpha^\beta \underbrace{(v - (I_h v))'}_{w' \in H^1} \underbrace{v'}_{z \in H^1} = \Big[(v - I_h v) v' \Big]_{x=\alpha}^{\beta} - \int_\alpha^\beta (v - I_h v) v''$$

$v(\alpha) = I_h v(\alpha)$
$v(\beta) = I_h v(\beta)$

$$\overset{CS}{\leq} \|v - I_h v\| \, \|v''\| \underset{\text{λήμμα (ii)}}{\leq} h \|v' - (I_h v)'\| \, \|v''\|$$

$\|v' - (I_h v)'\| \leq h\|v''\|$

βέλτιστη τάξη σύγκλισης για $v \in H^2 \cap H^{01}$

Αν $v \in H^2 \cap H^{01}$ αποδείξαμε $\|v - I_h v\| \leq h^2 \|v'\|$, $\|(v - I_h v)'\| \leq h\|v''\|$

Παρατήρηση: $\|v - I_h v\|_1^2 = \|v - I_h v\|^2 + \|v' - (I_h v)'\|^2 \leq h^4 \|v''\|^2 + h^2 \|v''\|^2 \leq 2h^2 \|v''\|^2$

Συμπέρασμα: $\|v - I_h v\|_1 \leq C \cdot h\|v''\|$

Άρα $\|u - u_h\|_1 \leq C \, h \|u''\|$: Εκτίμηση σφάλματος της μεθόδου Galerkin

Μάθημα 15ο ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 27/3/2018

$\|u-u_h\|_1 \le C\cdot h\|u''\| \quad u\in H^2\cap H^{01}$

Θεώρημα: $u\in H^2\cap H^{01}$ ασθενής λύση $\|u-u_h\|\le C\cdot h^2\|u''\|$

Απόδειξη:

$e=u-u_h\in H^{01}$

$$\begin{cases} -(p\psi')'+q\psi=e & \alpha<x<\beta \\ \psi(\alpha)=0,\ \psi(\beta)=0 \end{cases}$$

$\|\psi\|_2\le C\|e\| \quad \psi\in H^2\cap H^{01} \qquad \|e\|\le ?$

Το τέχνασμα του Nitsche $\longrightarrow B(\psi,v)=(e,v)\ \ \forall\, v\in H^{01}$

Θέτω $v=e$

$$\|e\|^2=(e,e)=B(\psi,e)=B(e,\psi)=B(u-u_h,\psi)=B(u-u_h,\psi-\overbrace{I_h\psi}^{\varphi\in S_h})\le C_1\|u-u_h\|_1\|\psi-I_h\psi\|_1$$

$$\le C\,h\|u''\|\cdot Ch\|\psi''\|\le C\,h^2\|u''\|\,\|e\|\iff \|e\|^2\le Ch^2\|u''\|\,\|e\|$$

$$\iff \|e\|\le Ch^2\|u''\|\iff \max_{\alpha\le x\le\beta}|u(x)-u_h(x)|\le C\cdot h^2\max_{u\in C^2}\|u''\|$$

$H^1: \|u-u_h\|_1=O(h)$

$L^2: \|u-u_h\|=O(h^2)$

$L^\infty: \|u-u_h\|=O(h^2),\ u\in C^2$

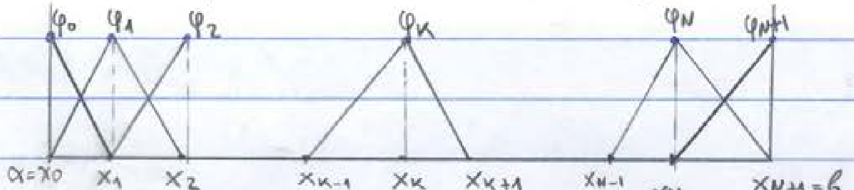
$$-(pu')'+qu=f \qquad x\in(\alpha,\beta)$$

$$u'(\alpha)=0,\ u'(\beta)=0$$

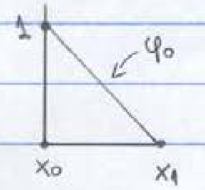
$$p\in C^1,\ p>0,\ q\in C,\ q>0 \qquad \exists!\ y\in H^2$$

$B(u,v)=(f,v)\quad \forall\, v\in H^1,\ u\in H^1 \quad (\Rightarrow u\in H^2)$

$\tilde S_h:=\{\varphi\in C(\bar I),\ \varphi|_{[x_i,x_{i+1}]}\in\mathbb{P}_1\}\subset H^1 \qquad \dim\tilde S_h=N+2$

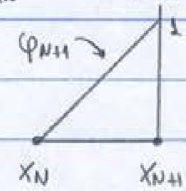


$\varphi_i(x_k)=\delta_{ik} \quad i,k=1,2,\dots,N$



$\varphi_0(x_0)=1$

$\varphi_0(x_k)=0 \quad k\neq 0$



$\varphi_{N+1}(x_{N+1})=1$

$\varphi_{N+1}(x_k)=0 \quad k\neq N+1$

$\{\varphi_i\}_{i=0}^{N+1}$ είναι βάση του S_h

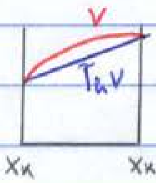
$B(u_h,\varphi) = (f,\varphi) \quad \forall\, \varphi\in\tilde{S}_h \,, \quad u_h\in\tilde{S}_h$

$\tilde{I}_h u(x_i) = u(x_i) \quad 0\le i\le N+1$

$\|v-\tilde{I}_h v\| + h\|(v-\tilde{I}_h v)'\| \le C h\|v'\| \quad v\in H^1$

$\|v-\tilde{I}_h v\| + h\|(v-\tilde{I}_h v)'\| \le C\cdot h^2\|v''\| \quad v\in H^2$

Απόδειξη όπως στην περίπτωση του $S_h\subset H_0^1$



$v(x_k) = (\tilde{I}_h v)(x_k)$

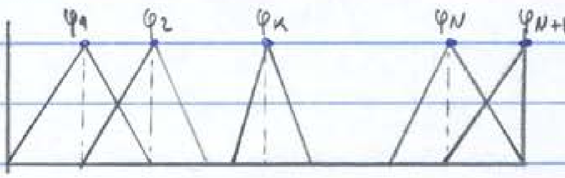
$\|u-u_h\|_1 \le C h\|u'\|$

$\|u-u_h\| \le C\cdot h^2\|u''\| \quad u_h\in\tilde{S}_h$

$-(pu')' + qu = f \quad x\in(\alpha,\beta)$

$u(\alpha)=0 \quad , u''(\beta)=0$

$H^0_\alpha = \{u\in H^1, u(\alpha)=0\}$



$\dim S_h = N+1$

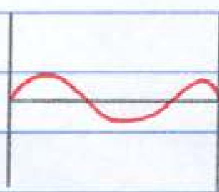
$u(\alpha) + K u'(\alpha) = 0$

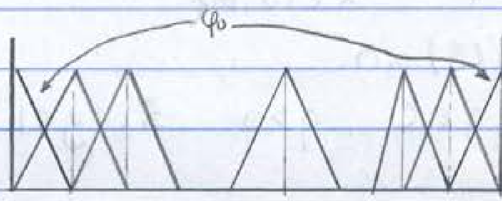
$S_h\subset H^1$

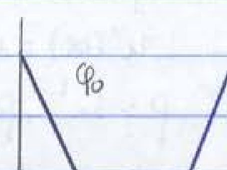
Περιοδικές συνθήκες

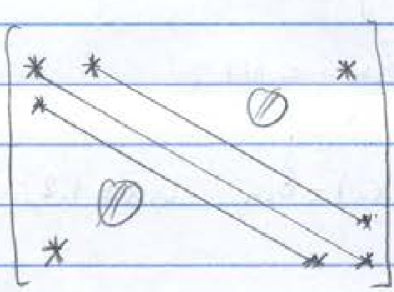
$u(\alpha) = u(\beta)$

$u'(\alpha) = u'(\beta)$

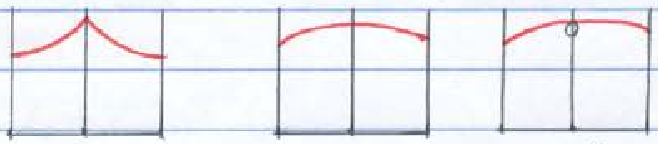








ΕΦΜ 4 Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 27/3/2018



C^1 κατά τμήματα κυβικές = Hermite

$H_h = \{\varphi \in C^1[\alpha, b], \varphi|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3\} \subset H^2$

βάση με μικρό φορέα.

Περιμένω διάσταση $4(N+1) - 2N = 2N + 4$

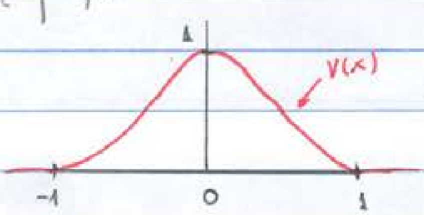
Λήμμα: $\lambda \neq \mu$ Δεδομένων σταθερών c_1, c_2, c_3, c_4 $\exists!$ $p \in \mathbb{P}_3(\lambda, \mu)$ τέτοιο ώστε $p(\lambda) = c_1$, $p'(\lambda) = c_2$, $p(\mu) = c_3$, $p'(\mu) = c_4$

Θα έχουμε σύστημα 4 εξισώσεων με 4 αγνώστους

$p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$

ομογενές σύστημα $\Rightarrow p = 0$

$$\left.\begin{cases} p(\lambda) = 0 \\ p'(\lambda) = 0 \\ p(\mu) = 0 \\ p'(\mu) = 0 \end{cases}\right\} \longrightarrow \quad p(x) = A(x-\lambda)^2(x-\mu)^2 \quad \text{όμως } p \in \mathbb{P}_3 \rightarrow A = 0$$



$v \in C^1(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{P}_3(-1, 0)$, $v \in \mathbb{P}_3(0, 1)$

$\mathrm{supp}\, v = [-1, 1]$

$v(-1) = 0 \qquad v(1) = 0$

$v'(-1) = 0 \qquad v'(1) = 0$

$v(0) = 1 \qquad v'(0) = 0$

Υπάρχει κυβικό πολυώνυμο $\mathbb{P}_3(-1, 0)$ με συνθήκες

$v(-1) = 0$, $v'(-1) = 0$

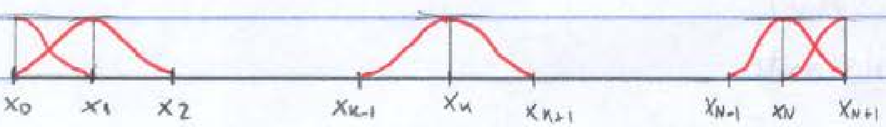
$v(0) = 1$, $v'(0) = 0$

και υπάρχει πολυώνυμο στο $\mathbb{P}_3(0,1)$ με συνθήκες

$V(1)=0 \quad , V'(1)=0$

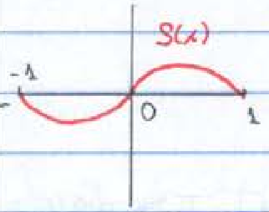
$V(0)=1 \qquad V'(0)=0$

$$V(x) = \begin{cases} (x+1)^2(\alpha x+\beta) & [-1,0] \\ (x-1)^2(\gamma x+\delta) & [0,1] \end{cases}$$



Από εδώ προκύπτουν $N+2$

αρά πρέπει να βρώ άλλες τόσες γιατί περιμένω $2N+4$.



$S(x) \in C^1(\mathbb{R}) \quad \operatorname{supp} S = [-1,1]$

$S(1)=0 \quad S(-1)=0 \qquad S(0)=0$

$S'(1)=0 \quad S'(-1)=0 \qquad S'(0)=1$

$$S(x) = \begin{cases} (x+1)^2 x & [-1,0] \\ (x-1)^2 x & [0,1] \end{cases}$$

$h=(\beta-\alpha)/(N+1)$

$$V_j(x) = \begin{cases} V\left(\frac{x-x_j}{h}\right) & [x_{j-1}, x_{j+1}] \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \qquad j=1,\dots,N+1$$

$V_j(x_k)=\delta_{jk} \qquad V_j'(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} V'\left(\frac{x-x_j}{h}\right) & [x_{j-1}, x_{j+1}] \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$

$$S_j(x) = \begin{cases} h\cdot S\left(\frac{x-x_j}{h}\right) & [x_{j-1}, x_{j+1}] \\ 0 \end{cases}$$

$S_j(x_k)=0$

$S_j'(x) = S'\left(\frac{x-x_j}{h}\right)$

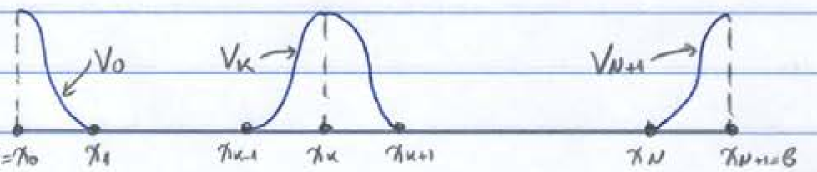
$S_j'(x_j)=1.$

Μάθημα 16ο ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 16/4/2018

• $\mathcal{H}_h = \{ \varphi \in C^1[\alpha,\beta] : \varphi|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{P}_3 \} \subseteq H^2(\alpha,\beta)$ $\qquad \dim \mathcal{H}_h = 2N+4$

• $\mathring{\mathcal{H}}_h = \mathcal{H}_h \cap \{ \varphi : \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \} \subset H^2 \cap H^{01}$ $\qquad \dim \mathring{\mathcal{H}}_h = 2N+2$

βάση $\mathcal{H}_h$ $\quad \{ V_j, S_j \}_{j=0}^{N+1}$ $\quad$ (V_j, S_j συναρτήσεις)

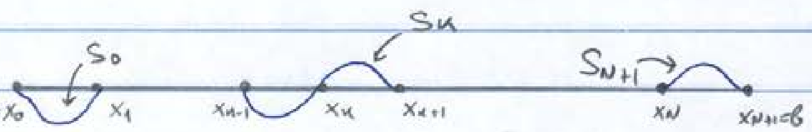


$V_k(x_j) = \delta_{kj} \quad 0 \le k, j \le N+1$

$V_k'(x_j) = 0 \quad \forall k, j$

$\operatorname{supp} V_k = [x_{k-1}, x_{k+1}] \quad 1 \le k \le N$

$\operatorname{supp} V_0 = [x_0, x_1]$, $\operatorname{supp} V_{N+1} = [x_N, x_{N+1}]$



$S_k(x_j) = 0 \quad \forall k,j \quad , \quad S_k'(x_j) = \delta_{kj} \quad \forall k,j$

$\operatorname{supp} S_k = [x_{k-1}, x_{k+1}] \quad , \quad \operatorname{supp} S_0 = [x_0, x_1] \quad , \quad \operatorname{supp} S_{N+1} = [x_N, x_{N+1}]$

Για το $\mathring{\mathcal{H}}_h$ θα έχω $V_s, 1 \le s \le N$, $S_j \ 0 \le j \le N+1$

Πρόταση: $\{V_j, S_j\}_{j=0}^{N+1}$ είναι βάση του $\mathcal{H}_h$

Απόδειξη:

$$\sum_{j=0}^{N+1} c_j V_j(x) + d_j S_j(x) = 0 \quad \forall \ x \in [\alpha, \beta]$$

Για $x = x_k$ θα έχω $\sum c_j \overbrace{V_j(x_k)}^{\delta_{jk}} + d_j \underbrace{S_j(x_k)}_{0} = 0 \Longrightarrow c_k = 0 \ \forall k$

Παίρνοντας την παράγωγο

$$\sum_{j=0}^{N+1} c_j V_j'(x) + d_j S_j'(x) = 0$$

Για $x = x_k$ θα έχω $\sum_{j=0}^{N+1} c_j \underbrace{V_j'(x_k)}_{0} + d_j \overbrace{S_j'(x_k)}^{\delta_{jk}} = 0 \Longrightarrow d_k = 0 \ \forall k.$

Θα δείξω ότι παράγουν τον χώρο

$$\psi \in \mathcal{H}_h \Rightarrow \psi \in C^1[\alpha, \beta] \ , \ \psi|_{[x_i, x_{i+1}]} \in \mathbb{R} \longrightarrow \psi(x) = \sum_{j=0}^{N+1} \psi(x_j) V_j(x) + \psi_j'(x) S_j(x)$$

Το ερώτημα είναι αν ισχύει κάτι τέτοιο.

1

$\sum_{j=0}^{N+1} \psi(x_j) v_j(x) + \psi'(x_j) S_j(x)$ είναι συνάρτηση Hermite $(\in H_h)$

ψ στο $[x_k, x_{k+1}]$

Αν ξέρω   Τότε ξέρω

$\psi(x_k)$

$\psi(x_{k+1})$ $H(x_k, x_{k+1})$

$\psi'(x_k)$

$\psi'(x_{k+1})$

Το δεξιό μέλος $\in P_3[x_k, x_{k+1}]$

Για $x = x_k$ δεξιό μέλος $= \psi(x_k)$

Για $x = x_{k+1}$ δεξιό μέλος $= \psi(x_{k+1})$

Το δεξιό μέλος παράγωγος

για $x = x_k$ δεξιό μέλος $= \psi'(x_k)$

για $x = x_{k+1}$ δεξιό μέλος $= \psi'(x_{k+1})$

Άρα σε κάθε διάστημα αριστερό μέλος = δεξιό μέλος και αφού είναι C^1 είναι ίδια και παράγουν τον χώρο

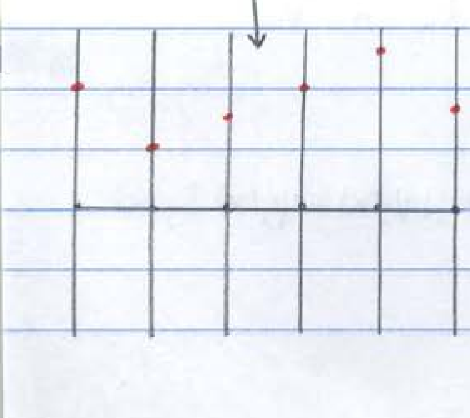
Συνάρτηση παρεμβολής

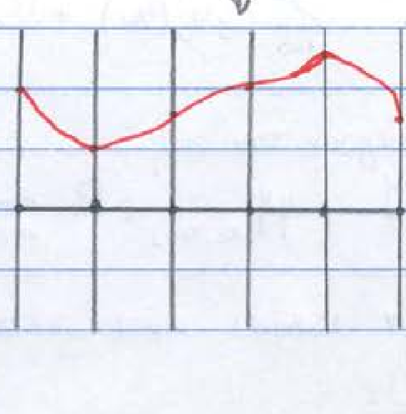
$f \in C^1[\alpha, \beta]$ $\exists!\ \tilde{f} \in H_h$ τέτοια ώστε $f(x_i) = \tilde{f}(x_i)$ $0 \le i \le N+1$

$f'(x_i) = \tilde{f}'(x_i)$ $0 \le i \le N+1$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=0}^{N+1} f(x_j) v_j(x) + f'(x_j) S_j(x)$$

Δηλαδή έχοντας αυτό   Θα πάρω αυτό





ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 16/4/2018

Θεώρημα: Έστω ότι $f \in H^m$ $m = 2, 3$ ή 4 (m=1 δεν παίρνω γιατί πρέπει $f \in C^1$), τότε
$\|f - \tilde{f}\|_k \leq C\, h^{m-k} \|f^{(m)}\|$ $\quad k = 0, 1, 2$ $\quad (h = \max(x_{i+1} - x_i))$
(Για $k=0 \Rightarrow \|\ \|_{L^2}$), (C σταθερά ανεξάρτητη των f και h)
Άρα το καλύτερο που μπορώ να κάνω είναι $k=0, m=4$ $\|f - \tilde{f}\| = O(h^4)$

Παρατήρηση: Ανάλογα και όταν $f \in \mathcal{H}^m \cap \mathcal{H}^{01}$, $\tilde{f} \in \mathring{\mathcal{H}}_h$

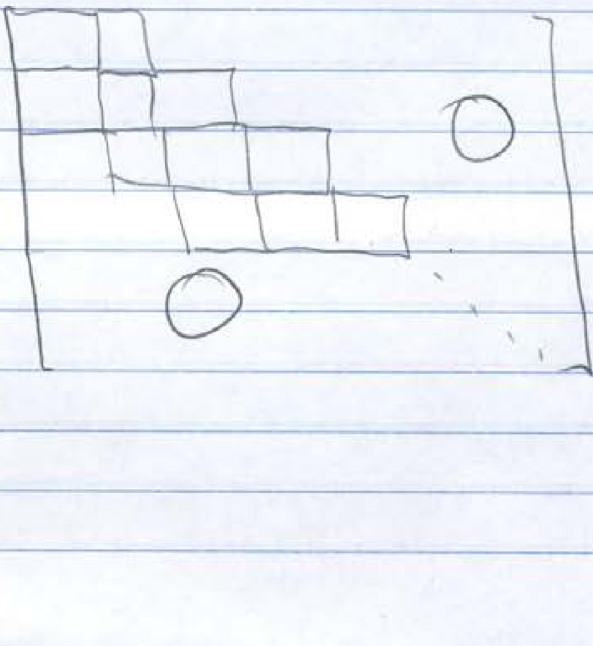
$-(pu')' + qu = F$ $\qquad u'(\alpha) = u'(\beta) = 0 \rightsquigarrow H_h$
$\qquad\qquad\qquad\qquad u(\alpha) = u(\beta) = 0 \rightsquigarrow \mathring{H}_h$

Και λύνω το σύστημα $\qquad u_h \in \mathcal{H}_h \leftarrow$ λύση
$B(u_h, \varphi) = (f, \varphi) \ \forall \varphi \in \mathcal{H}_h$
$\|u - u_h\|_1 \leq C \inf_{x \in \mathcal{H}_h} \|u - x\|_1 \leq C \|u - x\|_1 \underset{m=4}{\leq} C h^3 \|u^{(4)}\|$ $\quad$ Από Nitsche: $\|u - u_h\| \leq C h^4 \|u^{(4)}\|$

Για τον πίνακα του συστήματος έχω: $A_{ij} = B(\varphi_i, \varphi_j)$ $\quad \{\varphi_i\} = \{V_j, S_j\}$
Διάταξη $\quad \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_k, \varphi_{k+1}$. $\quad k = 2 \cdot s$
$\qquad V_0, S_0, V_1, S_1, \ldots V_s, S_s$. $\quad$ Τα V_j, S_j έχουν κοινό φορέα

		k-3	k-2	k-1	k	k+1	k+2	k+3	k+4
$k \rightarrow$	0	0 0	$V_s V_{s-1}$	$V_s S_{s-1}$	$V_s V_s$	$V_s S_s$	$V_s V_{s+1}$	$V_s S_{s+1}$	0 . 0
$k+1 \rightarrow$			$S_s V_{s-1}$	$S_s S_{s-1}$	$S_s S_s$	$S_s V_{s+1}$	$S_s V_{s+1}$	$S_s S_{s+1}$	

Άρα ο πίνακας είναι block τριδιαγώνιος.



Λήμμα 1: Αν $f \in H^2$ (χαμηλότερη δυνατή ομαλότητα της f) $D = d/dx$

$\|D^k (f-\tilde{f})\|_{L^2(x_{j-1},x_j)} \leq h \|D^{k+1}(f-\tilde{f})\|_{L^2(x_{j-1},x_j)} \quad \forall j \ , \ k=0,1$

↙ παρεμβάλλουσα Hermite

Για $k=0,1$ τότε $D^k(f-\tilde{f}) = 0 \quad x = x_{j-1}, x = x_j$

Άρα $D^k(f-\tilde{f})(x) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} D^{k+1}(f-\tilde{f})(s)\, ds \quad x \in [x_{j-1}, x_j] \Longrightarrow$

$|D^k(f-\tilde{f})(x)| = \int_{x_{j-1}}^{x_j} |D^{k+1}(f-\tilde{f})(s)|\, ds \overset{C-S}{\leq} \sqrt{\int_{x_{j-1}}^{x_j} 1^2} \sqrt{\int_{x_{j-1}}^{x_j} |D^{k+1}(f-\tilde{f})^2|\, ds} \leq \sqrt{h}\, \|D^{k+1}(f-\tilde{f})\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}$

$(D^k(f-\tilde{f})(x))^2 \leq h \|D^{k+1}(f-\tilde{f})\|^2_{L^2(x_{j-1},x_j)} \Longrightarrow \|D^k(f-\tilde{f})\|^2_{L^2(x_{j-1},x_j)} \leq h^2 \|D^{k+1}(f-\tilde{f})\|^2_{L^2(x_{j-1},x_j)}$

Παρατήρηση: $\sum_{j=1}^{N+1} \|D^k(f-\tilde{f})\|^2_{L^2(x_{j-1},x_j)} \leq h^2 \sum_{j=1}^{N+1} \|D^{k+1}(f-\tilde{f})\|^2_{L^2(x_{j-1},x_j)}$

$\|D^k(f-\tilde{f})\|^2_{L^2(a,b)} \leq h^2 \|D^{k+1}(f-\tilde{f})\|^2_{L^2(a,b)} \Longrightarrow \|D^k(f-\tilde{f})\| \leq h \|D^{k+1}(f-\tilde{f})\|$

Μάθημα 17ο ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 17/4/2018

$f \in C^1[\alpha, \beta]$

$\tilde{f} \in$ Η παρεμβάλλουσα της f

$\tilde{f}(x_k) = f(x_k)$, $\tilde{f}'(x_k) = f'(x_k)$ $\quad 0 \le k \le N+1$

Λήμμα 1: $f \in H^2$ $\|f-\tilde{f}\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \le h\|(f-\tilde{f})'\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}$, $\|(f-\tilde{f})'\|_{L^2(x_{i-1},x_i)} \le h \cdot \|(f-\tilde{f})''\|_{L^2(x_{i-1},x_i)}$

Λήμμα 2: $f \in H^m$ $m=2,3,4$ $\quad \|D^2(f-\tilde{f})\| \le h^{m-2}\|D^m f\|$

Απόδειξη:

Ισχυρισμός $\psi \in \mathbb{P}_3(x_{j-1},x_j)$ $\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_j} D^2(f-\tilde{f})\, D^2\psi = 0$ Ολοκληρώνω 2 φορές κατά παράγοντες

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} D^2(f-\tilde{f})D^2\psi = \Big[\overbrace{D(f-\tilde{f})}^{0} D^2\psi\Big]_{x_{j-1}}^{x=x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} D(f-\tilde{f})\, D^3\psi = -\Big[\overbrace{(f-\tilde{f})}^{0}D^3\psi\Big]_{x_{j-1}}^{x_j} + \int_{x_{j-1}}^{x_j}(f-\tilde{f})\overbrace{D^4\psi}^{0} = 0$$

$$\|D^2(f-\tilde{f})\|^2_{L^2(x_{j-1},x_j)} = \int_{x_{j-1}}^{x_j} D^2(f-\tilde{f})\,D^2(f-\tilde{f}) = \int_{x_{j-1}}^{x_j} D^2(f-\tilde{f})\, D^2 f \qquad m=2$$

Αν $m=3 \rightarrow$ $\displaystyle = \Big[\overbrace{D(f-\tilde{f})}^{0}D^2 f\Big]_{x_{j-1}}^{x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} D(f-\tilde{f})\, D^3 f$

Αν $m=4 \rightarrow$ $\displaystyle = -\Big[\overbrace{(f-\tilde{f})}^{0}D^3 f\Big]_{x_{j-1}}^{x_j} + \int_{x_{j-1}}^{x_j}(f-\tilde{f})\,D^4 f.$

$$\|D^2(f-\tilde{f})\|^2_{L^2(x_{j-1},x_j)} = (-1)^m\int_{x_{j-1}}^{x_j} D^{4-m}(f-\tilde{f})\,D^m f \qquad m=2,3,4 \quad \xRightarrow{C-S}$$

$$\|D^2(f-f)\|^2_{L^2(x_{j-1},x_j)} \le \|D^{4-m}(f-\tilde{f})\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}\,\|D^m f\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}$$

• $m=2$ $\quad \|D^2(f-\tilde{f})\|_{L^2(x_{j-1},x_j)} \le \|D^2 f\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}$

$$\sum_j \|D^2(f-\tilde{f})\|^2_{L^2(x_{j-1},x_j)} \le \sum_j \|D^2 f\|^2_{L^2(x_{j-1},x_j)} \qquad \|D^2(f-\tilde{f})\| \le \|D^2 f\|$$

• $m=3$ $\quad \|D^2(f-\tilde{f})\|^2_{L^2(x_{j-1},x_j)} \le \underbrace{\|D(f-\tilde{f})\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}}_{\overset{\Lambda 1}{\le}\, h\|D^2(f-\tilde{f})\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}} \cdot \|D^3 f\|_{L^2(x_{j-1},x_j)}$

$\|D^2(f-\tilde{f})\| \le h\|D^3 f\|$

• $m=4$ $\quad \|D^2(f-\tilde{f})\| \le h^2\|D^4 f\|$

Αν $f \in H^m$, $m = 2,3,4$ $\quad \|f-\tilde f\|_k \le c\, h^{m-k}\|f^{(m)}\|$ $\quad k=0,1,2$.

Απόδειξη • $m=4$, $k=0$

$$\|f-\tilde f\| \underset{Λ1}{\le} h\|(f-\tilde f)'\| \underset{Λ1}{\le} h^2\|(f-\tilde f)''\| \underset{Λ2}{\le} h^2 h^2 \|D^4 f\| = h^4\|D^4 f\|$$

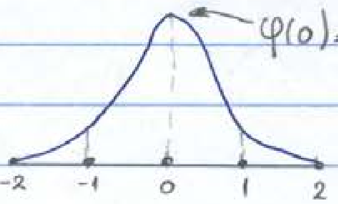
$$k=1 \quad \|(f-\tilde f)'\| \underset{Λ1}{\le} h\,\|(f-\tilde f)''\| \underset{Λ2}{\le} h^3\|D^4 f\|$$

$$\|f-\tilde f\|_1 \le c\, h^3 \|D^4 f\|$$

Κυβικές Splines (C^2)

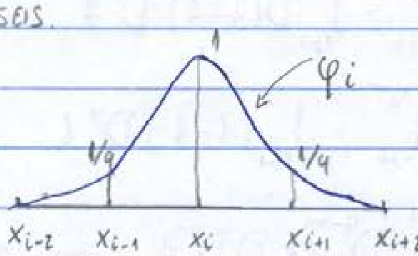
$h = \dfrac{b-a}{N+1}$ $\qquad x_i = a + ih$ $\qquad S_h = \{\varphi \in C^2[a,b],\ \varphi|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathbb{P}_3\}$

Κατασκευή της βάσης



16 άγνωστοι

16 εξισώσεις.

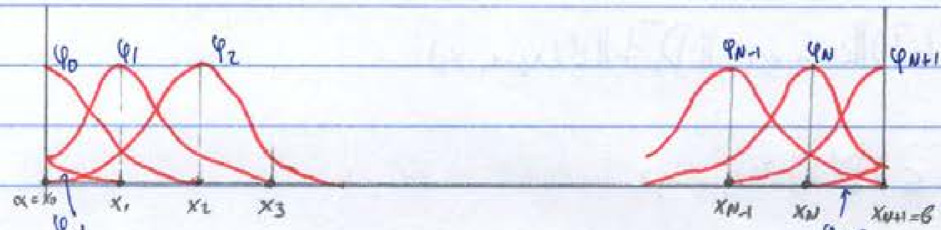


B-splines

άρτια περί του x_i

$\operatorname{Supp} \varphi_i = [x_{i-2}, x_{i+2}]$

Ομοιόμορφος διαμερισμός.



$$\underbrace{\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{N-1}, \varphi_N, \varphi_{N+1}, \varphi_{N+2}}_{N+4}$$

Δεν ισχύει η ιδιότητα Lagrange $\varphi_i(x_k) = \delta_{ik}$.

1) Γραμμική Ανεξαρτησία.

$$\sum_{i=-1}^{N+2} c_i \varphi_i(x) = 0 \qquad x = x_k \quad 2 \le k \le N-1 \quad \sum_{i=-1}^{N+2} c_i \varphi_i(x_k) = 0 \Longrightarrow \underbrace{\frac14 c_{k-1} + c_k + \frac14 c_{k+1} = 0}^{N-2}$$

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για Μ.Δ.Ε — 17/4/2018

$x = x_1 \quad \frac{1}{4} c_0 + c_1 + \frac{1}{4} c_2 = 0$

$x = x_N \quad \frac{1}{4} c_{N-1} + c_N + \frac{1}{4} c_{N+1} = 0$

$x = x_0 = \alpha \quad \frac{1}{4} c_{-1} + c_0 + \frac{1}{4} c_1 = 0$

$x = x_{N+1} = \beta \quad \frac{1}{4} c_N + c_{N+1} + \frac{1}{4} c_{N+2} = 0.$

$$\sum_{i=-1}^{N+2} c_i \varphi_i'(x) = 0 \qquad x = x_0 = \alpha \qquad c_{-1} \varphi_{-1}'(x_0) + c_0 \cancel{\varphi_0'(x_0)}^{\to 0} + c_1 \varphi_1'(x_0) = 0$$

$\varphi_1'(x_2) = -\varphi_1'(x_0)$

$\Rightarrow \quad c_{-1} - c_1 = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_{-1}$

Όμοια $\quad c_{N+2} = c_N$

$2c_0 + c_1 = 0$

$c_{k-1} + 4c_k + c_{k+1} = 0 \qquad k = 1, \dots, N$

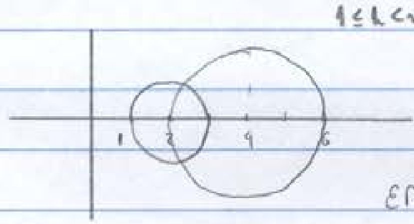
$2c_{N+1} + c_N = 0$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \dots & & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 & 4 \; 1 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & \dots & 1 \; 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \\ c_{N+1} \end{pmatrix} = 0$$

$$|\alpha_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |\alpha_{ij}| \;\forall i,j \quad \rightarrow \quad \forall i \; 1 \le i \le n \quad |\lambda - \alpha_{ii}| \le \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{n} |\alpha_{ij}| = \rho_i$$

$|\lambda - 2| \le 1$

$|\lambda - 4| \le 2$



Από θεώρημα Gerschgorin δεν $\exists$ ιδιοτιμή $0 \Longrightarrow \exists$ ο A^{-1}

επειδή $\lambda_i \in (1,6)$

άρα $c_i = 0 \;\forall i \Longrightarrow$ γραμμική ανεξαρτησία.

Μάθημα 18ο ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 23/4/2018

Θέλω να δείξω τώρα ότι παράγει τον χώρο S_h.
$M = \langle \varphi_{-1}, \varphi_0, \dots, \varphi_{N+2} \rangle$ (ο διανυσματικός χώρος που παράγεται από τα φ_i)

Προφανώς $M \subseteq S_h$ άρα θα δείξω ότι $S_h \subseteq M$.

Λήμμα 1: Δεδομένης $f \in C^1[\alpha,\beta]$ $\exists!$ $\tilde{f} \in M$ τέτοια ώστε $\tilde{f}(x_k) = f(x_k)$ $k=0,\dots,N+1$ και $\tilde{f}'(\alpha) = f'(\alpha)$, $\tilde{f}'(\beta) = f'(\beta)$ (συνθήκες παρεμβολής 1ης παραγώγου στα άκρα.)

Απόδειξη:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{i=-1}^{N+2} \alpha_i \varphi_i(x) \qquad \tilde{f}(x_k) = f(x_k) \quad k=0,\dots,N+1 \Longrightarrow$$

$$\alpha_{k-1}\varphi(x_k) + \alpha_k \varphi(x_k) + \alpha_{k+1}\varphi(x_k) = f(x_k) \Longrightarrow$$

$$f(x_k) = \frac{1}{4}\alpha_{k-1} + \alpha_k + \frac{1}{4}\alpha_{k+1} \quad k=0,\dots,N+1$$

$$\tilde{f}'(\alpha) = f'(\alpha) \Rightarrow \alpha_{-1}\varphi_{-1}'(\alpha) + \alpha_0 \underbrace{\cancel{\varphi_0'(\alpha)}}_{0} + \alpha_1 \varphi_1'(\alpha) = f'(\alpha) \Longrightarrow \alpha_{-1} - \alpha_1 = \frac{f'(\alpha)}{\varphi_{-1}'(\alpha)}$$

Με την ίδια λογική $\alpha_{N+2} - \alpha_N = \dfrac{f'(\beta)}{\varphi_{N+2}'(\beta)}$

Το γραμμικό σύστημα ως προς α έχει τον ίδιο πίνακα με το ομογενές σύστημα της γραμμικής ανεξαρτησίας.
Άρα το μη ομογενές έχει μοναδική λύση.

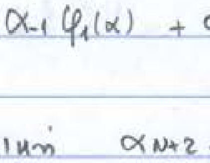
Λήμμα 2: Δεδομένης $f \in C^1[\alpha,\beta]$ $\exists!$ $\tilde{S} \in S_h$ τέτοια ώστε $\tilde{S}(x_k) = f(x_k)$ $k=0,\dots,N+1$
$\tilde{S}'(\alpha) = f'(\alpha)$, $\tilde{S}'(\beta) = f'(\beta)$

Απόδειξη:

$\tilde{S} \in S_h$, $\tilde{S} \in C^2$ κατά τμήματα $\mathbb{P}_3$. Ορίζονται καλώς $\tilde{S}''_k = \tilde{S}''(x_k)$, $\tilde{S}''_{k+1} = \tilde{S}''(x_{k+1})$

$\tilde{S}''_{[x_k, x_{k+1}]} \in \mathbb{P}_1$

$\tilde{S}''(x) \longrightarrow$



$$\tilde{S}'(x) = \int_{x \in (x_k, x_{k+1})}^{x} \tilde{S}''(s)\,ds + C_1$$

$$\tilde{S}(x) = \int^{x} \tilde{S}'(s)\,ds + C_2 + C_1 x \longrightarrow$$

βλέπε αριθμητική Ι

(γραμμικό σύστημα ως προς $\tilde{S}''_k$ $k=0,1,\dots,N+1$)

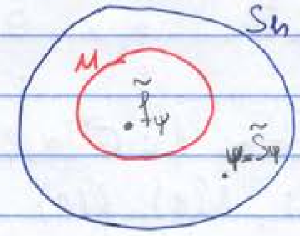
με τον ίδιο πίνακα με το λήμμα 1 και την γραμμική ανεξαρτησία.

Αφού έχω αποδείξει τα Λήμματα 1 και 2

Έστω $\psi \in S_h$ (όχι στο M) μπορώ να κατασκευάσω 2 συναρτήσεις

$\nearrow \tilde{f}_\psi \longleftarrow$ "παρεμβάλουσα" στον M

$\searrow \tilde{S}_\psi \leftarrow$ "Παρεμβάλουσα" στον S_h $\qquad \psi = \tilde{S}_\psi$ λόγω μοναδικότητας του $\tilde{S}_\psi$ στο S_h



$\tilde{f}_\psi \in M \Rightarrow \tilde{f}_\psi \in S_h \Rightarrow \tilde{f}_\psi = \tilde{S}_\psi$ λόγω μοναδικότητας

$\psi = \tilde{f}_\psi \in M \quad \Rightarrow \psi \in M$

Λήμμα 3: $f \in H^2$: $\| D^{(r)}(f - \tilde{f}) \| \leq c \cdot h \| D^{(r+1)}(f - \tilde{f}) \| \qquad r = 0, 1$

Απόδειξη:

• $r = 0 \qquad x \in [x_{n-1}, x_n] \qquad (f - \tilde{f})(x) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} (f - \tilde{f})'(s)\, ds$

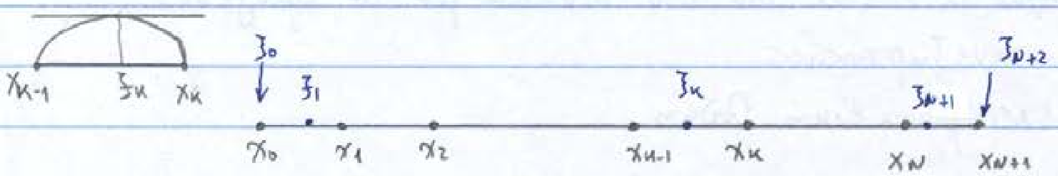
$|(f - \tilde{f})(x)| \leq \int_{x_{n-1}}^{x_n} |(f - \tilde{f})'| \leq \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} 1^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{x_{n-1}}^{x_n} ((f - \tilde{f})')^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{h}\, \|(f - \tilde{f})'\|_{L^2(x_{n-1}, x_n)}$

$\Rightarrow \| f - \tilde{f} \|_{L^2(x_{n-1}, x_n)} \leq h \| (f - \tilde{f})' \|_{L^2(x_{n-1}, x_n)} \Longrightarrow \sum_n \| f - \tilde{f} \|_{L^2} = \| f - \tilde{f} \|$

• $r = 1 \quad \| (f - \tilde{f})' \| \leq c \cdot h \| (f - \tilde{f})'' \|$

$x \in [x_{n-1}, x_n] \qquad (f - \tilde{f})'(x) = \int_{x_{n-1}}^{x_n} (f - \tilde{f})''(s)\, ds$

Επειδή $\varphi = f - \tilde{f} \in C'[x_{n-1}, x_n]$ από Θ.Rolle $\exists\, \xi \in (x_{n-1}, x_n)$ τέτοιο ώστε $\varphi'(\xi_n) = 0$



$\xi_i \neq \xi_j \quad i \neq j$

$\xi_0 := x_0 \quad , \quad \varphi'(\xi_0) = f'(\alpha) - \tilde{f}'(\alpha) = 0 \qquad \xi_{N+2} := x_{N+2} \quad \varphi'(\xi_{N+2}) = 0$

$\bigcup [\xi_i, \xi_{i+1}] = [\alpha, \beta] \qquad\qquad \varphi = f - \tilde{f}$

$x \in [\xi_{n-1}, \xi_n] \quad , \quad \varphi'(x) = \int_{\xi_{n-1}}^{x} \varphi''(s)\, ds \Longrightarrow$

$|\varphi'(x)| \leq \int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} |\varphi''| \leq \sqrt{\xi_n - \xi_{n-1}}\, \|\varphi''\|_{L^2[\xi_{n-1}, \xi_n]} \leq \sqrt{2h}\, \|\varphi''\|_{L^2[\xi_{n-1}, \xi_n]}$

$(\varphi'(x))^2 \leq 2h \|\varphi''\|^2_{L^2(\xi_{n-1}, \xi_n)} \qquad x \in [\xi_{n-1}, \xi_n]$

$\int_{\xi_{n-1}}^{\xi_n} |\varphi'(x)^2|\, dx \leq 4h^2 \|\varphi''\|^2_{L^2(\xi_{n-1}, \xi_n)}$

$\|\varphi'\|_{L^2(\xi_{n-1}, \xi_n)} \leq 2h \|\varphi''\|_{L^2(\xi_{n-1}, \xi_n)}$

ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 23/4/2018

Λήμμα 4: $f \in H^m$, $m = 2,3,4$ $\quad \| D^2(f-\tilde{f}) \| \le c\, h^{m-2} \| f^{(m)} \|$

Απόδειξη:

$$\int_\alpha^b (f-\tilde{f})'' \cdot \tilde{f}'' = 0$$

$$\int_\alpha^b (f-\tilde{f})''\tilde{f}'' = \left[\cancel{(f-\tilde{f})'\tilde{f}''} \right]_\alpha^b - \int_\alpha^b (f-\tilde{f})'\tilde{f}''' = \sum_{k=0}^{N} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f-\tilde{f})' f''' =$$

$$= -\sum_{k=0}^{N} \left\{ \left[\cancel{(f-\tilde{f})}\tilde{f}''' \right]_{x_{k-1}}^{x_k} - \int_{x_{k-1}}^{x_k} \cancel{(f-\tilde{f})\tilde{f}^{(4)}} \right\} = 0$$

$$\| D^2(f-\tilde{f}) \| = \int_\alpha^b (f-\tilde{f})''(f-\tilde{f})'' \overset{\text{ορθογ}}{=} \int_\alpha^b (f-\tilde{f})'' \cdot f''$$

- $m=2 \quad \le \| (f-\tilde{f})'' \| \, \| f'' \| \Longrightarrow \| (f-\tilde{f})'' \| \le \| f'' \|$
- $m=3 \quad = \left[\cancel{(f-\tilde{f})'} f'' \right]_\alpha^b - \int_\alpha^b (f-\tilde{f})' f''' \Longrightarrow \| (f-\tilde{f})'' \| \le \| (f-\tilde{f})' \| \, \| f''' \|$

  $\underset{Λ2}{\le} c \cdot h \| (f-\tilde{f})'' \| \, \| f^{(3)} \| \le \| (f-\tilde{f})'' \| \le c\, h \| f^{(3)} \|$

- $m=4 \quad \ldots \Longrightarrow \| (f-\tilde{f})'' \| \le c h^2 \| f^{(4)} \|$

Θεώρημα: Αν $f \in H^m$, $m = 2,3,4$ και $\tilde{f} \in S_h$ είναι η παρεμβάλουσα με συνθήκες πρώτης παραγώγου στα άκρα, τότε:

$$\| f - \tilde{f} \|_k \le c \cdot h^{m-k} \| f^{(m)} \| \qquad k = 0,1,2,\ m = 2,3,4, \quad \tilde{f} \in H^3$$

Απόδειξη:

- $m=4. \quad \| f-\tilde{f} \| \underset{Λ2}{\le} c h \| (f-\tilde{f})' \| \underset{Λ2}{\le} c h^2 \| (f-\tilde{f})'' \| \underset{\substack{Λ4 \\ m=4}}{\le} c h^4 \| f^{(4)} \|$

$$\| u - u_h \| \le c\, h^4 \| u^{(4)} \|$$

Η βάση $\varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1, \ldots$ είναι βάση για συνθήκες Newman $(N+4)$

Για Dirichlett θέλω $N+2$ $\quad \varphi_{-1}, \varphi_0, \varphi_1$ που να είναι γραμμικά ανεξάρτητα από τα άλλα

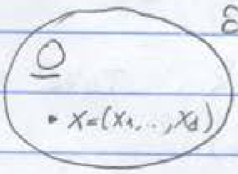
$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 - \varphi_{-1} \Big|_{x=\alpha} = 0$$

$$\tilde{\varphi}_0 = \varphi_0 - 4\varphi_i \Big|_{x=\alpha} = 0$$

Μάθημα 19º ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 29/4/2018

Χώροι Sobolev στον $\mathbb{R}^d$, $d=1,2,3$

$\partial \underline{O} = \overline{\underline{O}} - \underline{O}$



1) $L^2(\underline{O})$

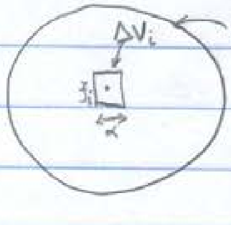
$\underline{O}$ = χωρίο του $\mathbb{R}^d$, (ανοιχτό συνεκτικό σύνολο, συνήθως φραγμένο $\rightarrow$ $\overline{\underline{O}}$ συμπαγές)

$f: \underline{O} \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad f \in C(\underline{O})$ ή $f \in C(\overline{\underline{O}})$

Αν $f \in C(\overline{\underline{O}})$ (μπορώ να ορίσω πολλαπλό ολοκλήρωμα Riemann στο $\underline{O}$)

$\int_{\underline{O}} f = \int_{\underline{O}} f(x)dx = \int\int_{\underline{O}} \dots \int f(x_1, \dots, x_d)\, dx_1 \dots dx_d$

Με αυτό το ολοκλήρωμα εννοούμε $= \lim\limits_{\substack{|\Delta V_i| \to 0 \\ M \to \infty}} \sum_{i=1}^{M} f(\xi_i)\Delta V_i \quad \left(f \in C(\overline{\underline{O}})\right)$



Μέτρο όγκου κύβου: $\mu(\Delta V) = \alpha^d$ $\longrightarrow$ μπορώ να μετρήσω του όγκου των συνόλων Borel. (μικρότερη σ-άλγεβρα)

Αν μπορώ να μετρήσω κύβους μπορώ να μετρήσω τον όγκο ενός ανοιχτού συνόλου

$\downarrow$

$\mu(O)$

Lebesgue πλήρη σ-άλγεβρα.

Ολοκλήρωμα Riemann $\rightarrow$ Ολοκλήρωμα Lebesgue

$L^2(\underline{O})$ = Είναι οι μετρήσιμες Lebesgue συναρτήσεις : $\int_{\underline{O}} u^2 dx < \infty$

Είναι χώρος Hilbert με $(u,v) = \int_{\underline{O}} uv\, dx$ $\quad \|u\| = \sqrt{(u,u)} = \sqrt{\int_{\underline{O}} u^2 dx}$

$|(u,v)| \leq \|u\|\,\|v\|$ $\quad u: \underline{O} \rightarrow \mathbb{R}$

2) $H^1(\underline{O})$

$u: \underline{O} \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad H^1(\underline{O}) = \left\{ u \in L^2(\underline{O}) : \exists g_i \in L^2(\underline{O}), 1 \leq i \leq d : \int_{\underline{O}} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_{\underline{O}} g_i \varphi,\ 1 \leq i \leq d,\ \forall \varphi \in C_c^\infty(\underline{O}) \right\}$

C^∞ και μηδέν, έξω από συμπαγές υποσύνολο του $\underline{O}$

g_i = γενικευμένες ή ασθενείς μερικές παράγωγοι 1ης τάξης με την έννοια του L^2

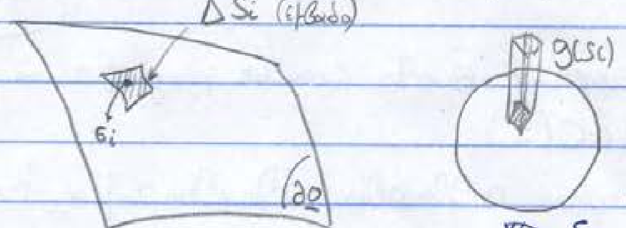
Θεώρημα Gauss (Θεώρημα Απόκλισης)

Έστω $\underline{O}$ φραγμένο, με την ιδιότητα σε κάθε σημείο του συνόρου του, να μπορώ να ορίσω μια κάθετο. Αν $f \in C^1(\underline{O}) \Rightarrow f, \frac{\partial f}{\partial x_i} \in C(\overline{\underline{O}})_{1 \leq i \leq d} \Rightarrow \int_{\underline{O}} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx = \int_{\partial \underline{O}} \nu_i f\, ds \quad 1 \leq i \leq d$

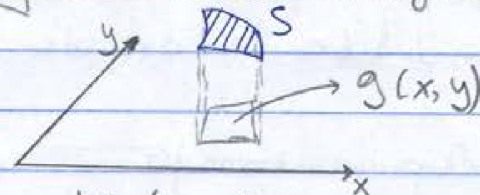
Στη φυσική $\int_{\Omega} div \vec{f} = \int_{\partial\Omega} \vec{\nabla} f \, ds \quad \vec{f} = (f_1, \dots, f_d)^T \quad div \vec{f} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}$

$g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ Τότε το επιφανειακό ολοκλήρωμα $\int_{\partial\Omega} g \, ds = \lim_{\substack{|\Delta S_i| \to 0 \\ M \to \infty}} \sum_{i=1}^{M} g(S_i) \Delta S_i$

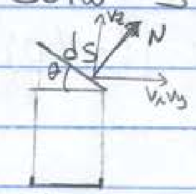
$g \in C(\partial\Omega)$



Αν ξέρω να υπολογίζω στοιχειώδη εμβαδά στο σύνορο $\Rightarrow$ μπορώ να υπολογίσω το επιφανειακό ολοκλήρωμα.



Έστω S επιφάνεια : $z = \varphi(x, y)$



$$dQ = ds \cdot \cos\theta \Rightarrow ds = dQ / \cos\theta$$
$$\cos\theta = v_z / |v|$$

$$F(x,y,z) = 0 \Rightarrow F(x,y,z) = z - \varphi(x,y)$$

$$v = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} = \frac{(-\varphi_x, -\varphi_y, 1)^T}{\sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}} \qquad \cos\theta = 1 / \sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}$$

$$ds = \frac{dQ}{dx\,dy} \sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2}$$

$$\int_S g \, ds = \int_Q g(x,y) \sqrt{1+\varphi_x^2+\varphi_y^2} \; \frac{dx\,dy}{dQ}$$

$$\mu(S) = \int_S 1 \, ds = \int_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_d}\right)^2} \, dx_1 \dots dx_{d-1} \qquad x_d = \varphi(x_1, \dots, x_{d-1})$$

Αν $u \in C^1(\overline{\Omega})$ και Ω πληροί τα κριτήρια για το Θεώρημα Gauss

$\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(u\varphi) - \int_\Omega \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} \qquad 1 \le i \le d$$

$$\overset{Gauss}{=} \int_{\partial\Omega} v_i u \varphi \, ds - \int_\Omega \varphi \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x_i}}_{g_i} dx$$

$$\Rightarrow \int_\Omega u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \varphi \, dx$$

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2 : \exists \, g_i \in L^2, 1 \le i \le d : \int_\Omega u \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \;\; \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}$$

$C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$

Αν $u \in C(\overline{\Omega})$ και κατά τμήματα ομαλή $\Rightarrow u \in H^1(\Omega)$ (θα το αποδείξουμε)

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 24/4/2018

$u, v \in H^1(\Omega)$: $(u,v)_1 = (u,v) + \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$

$\|u\|_1 = \sqrt{(u,u)_1} = \left(\|u\|^2 + \sum_{i=1}^{d} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|^2\right)^{1/2}$

$H^1(\Omega)$ χώρος Hilbert , $(\cdot,\cdot)_1$, $\|\cdot\|_1$

$u_n \in H^1(\Omega)$ Cauchy

u_n Cauchy στον L^2 $\quad u_n \xrightarrow{L^2} u$

$\frac{\partial u_n}{\partial x_i}$ Cauchy στον L^2 $\quad \frac{\partial u_n}{\partial x_i} \xrightarrow{L^2} g_i$

g_i = γενικευμένη παράγωγος του u και $u \in H^1$ και $u_n \xrightarrow{H^1} H$

3) Βασικές Ιδιότητες του $H^1(\Omega)$

- Ο $H^1(\Omega)$ διαφέρει από τον $H^1(I)$

π.χ $H^1(\Omega)$ δεν είναι άλγεβρα ως προς τον πολλαπλασιασμό.

$u, v \in H^1(\Omega) \not\Rightarrow uv \in H^1(\Omega)$

- Επίσης $L^\infty(\Omega) \not\subset H^1(\Omega)$ Δεν ισχύει

Αλλά υπάρχουν ιδιότητες που γενικεύονται όταν πάς από το I στο Ω

π.χ Θεώρημα Επέκτασης , Θεώρημα Sobolev

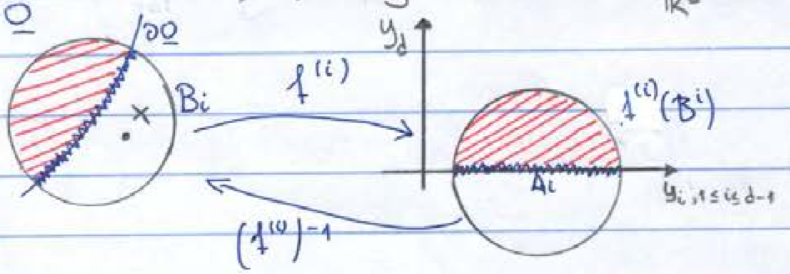
Θεώρημα πυκνότητας.

Μάθημα 20ο ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 30/4/2018

Ομαλότητα του συνόρου - Χωρία κλάσης C^1

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ χωρίο, φραγμένο $\partial\Omega$ σύνορο

Ορισμός: Ω κλάσης C^1, αν $\exists \{B_i\}_{i=1}^{m}$ (πεπερασμένο σύνολο από ανοιχτές μπάλες) που αποτελούν ανοιχτό κάλυμμα του συνόρου, $B_i \subset \mathbb{R}^d$, $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_i$
$B_i \cap \partial\Omega \neq \emptyset \ \forall i$ έτσι ώστε $\forall 1 \le i \le m \ \exists$ συνάρτηση $f^{(i)}: \overline{B_i} \to \mathbb{R}^d$
$f^{(i)} \in C^1(\overline{B_i})$, $y = f^{(i)}(x)$



Τέτοιο ώστε $f^{(i)}$ απεικόνιση 1-1, επί των B_i σε ανοιχτό φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^d$, έτσι ώστε:

(i) $f^{(i)}: \partial\Omega \cap \overline{B_i} \xrightarrow{1\text{-}1,\ \text{επί}}$ σε κλειστό υποσύνολο του υπερεπιπέδου $y_d = 0$
(ii) $f^{(i)}(\Omega \cap B_i)$ θα είναι ένα απλά συνεκτικό φραγμένο χωρίο του $\mathbb{R}^{d+}$, $y_d > 0$
(iii) $\det\left(\frac{\partial_k f^{(i)}}{\partial x_\ell}\right) \neq 0 \quad \forall x \in \overline{B_i} \quad \forall i$
Ιακωβιανός πίνακας $1 \le k, \ell \le d$

δηλαδή $\exists \ (f^{(i)})^{-1} : x = (f^{(i)})^{-1}(y)$ Η "εξίσωση" της επιφάνειας $\partial\Omega$ με τη B_i
$y_d = 0 : (y_1, \dots y_{d-1}) \longrightarrow x \in B_i \cap \partial\Omega$

- Ω κλάσης C^k : $f^{(i)} \in C^k$
- Ω κλάσης Lipschitz : $f^{(i)}$ είναι Lipschitz $\left(|f(x) - f(y)| \le L \cdot (x-y)\right)$

Ιδιότητες του $H^1(\Omega)$

1) Θεώρημα Επέκτασης.
Ω κλάσης C^1 (ισχύει και για Lipschitz), τότε $\exists$ γραμμικός τελεστής $E: H^1(\Omega) \to H^1(\mathbb{R}^d)$ τ.ω.:
(i) $Eu|_{\Omega}$, $\forall u \in H^1(\Omega)$
(ii) $\exists C : \|Eu\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \le C \|u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$
(iii) $\exists \tilde{C} : \|Eu\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \le \tilde{C} \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega)$

2) Προσέγγιση $u \in H^1(\Omega)$ από ομαλές συναρτήσεις.

Ω κλάσης C^1 (ισχύει και για Lipschitz), τότε δεδομένου $u \in H^1(\Omega)$, $\exists \varphi_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$ $n=1,\dots$ τέτοιο ώστε $\varphi_n \xrightarrow{H^1(\Omega)} u$ $\left(\|\varphi_n - u\| \xrightarrow{H^1(\Omega)} 0\right)$

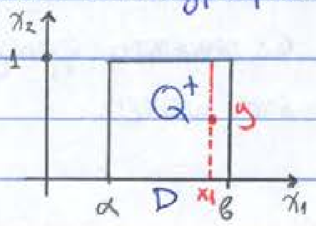
$\left(\psi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \varphi_n = \psi_n|_\Omega\right)$

3) Θεώρημα του Ίχνους

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ κλάσης C^1 (ισχύει και για Lipschitz). $\exists$ $C = C(\Omega)$ (εξαρτάται) σταθερά τέτοια ώστε $\forall u \in H^1(\Omega)$ $\exists g \in L^2(\Omega)$ (θα λέμε ότι η g είναι η τιμή της $u|_{\partial\Omega}$ με την "έννοια του ίχνους") τέτοια ώστε: $\|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \cdot \|u\|_{H^1(\Omega)}$ (χονδρικά "$g = u|_{\partial\Omega}$")

Απόδειξη: (Σκιαγράφηση)

ⓐ



$D = (\alpha, \beta)$

$Q^+ = D \times (0,1)$

$f \in C^1(\overline{Q^+})$ τότε $\|f\|_{L^2(D)} \leq \sqrt{2}\, \|f\|_{H^1(Q^+)}$

Έστω $x_1 \in D$ $\quad f(x_1,y) = f(x_1,0) + \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,s)\, ds$

$$f(x_1,0) = f(x_1,y) - \int_0^y \frac{\partial f(x_1,s)}{\partial x_2}\, ds$$

Από Θεώρημα μέσης τιμής ολοκληρωτικού λογισμού

$\int_0^1 f(x_1,\tau)\,d\tau = (1-0) f(x_1,\xi)$ όπου $\xi \in (0,1)$, $\xi = \xi(f,x_1)$.

Παίρνω $y = \xi$ $\quad f(x,0) = \int_0^1 f(x_1,\tau)\,d\tau - \int_0^\xi \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,s)\,ds$

$$|f(x_1,0)| \leq \int_0^1 |f(x_1,\tau)|\,d\tau + \int_0^1 \left|\frac{\partial f(x_1,s)}{\partial x_2}\right| ds$$

$$|f(x_1,0)| \overset{C\text{-}S}{\leq} \sqrt{\int_0^1 f^2(x_1,\tau)\,d\tau} + \sqrt{\int_0^1 \left(\frac{\partial f(x,s)}{\partial x_2}\right)^2 ds}$$

$\xRightarrow{(\alpha+\beta)^2 \leq 2(\alpha^2+\beta^2)}$

$$(f(x_1,0))^2 \leq 2\left(\int_0^1 f^2(x_1,\tau)\,d\tau + \int_0^1 \left(\frac{\partial f(x_1,s)}{\partial x_2}\right)^2 ds\right) \xRightarrow[\text{ως προς } D]{\text{ολοκληρώνω}}$$

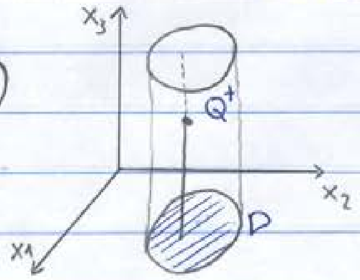
$$\int_D (f(x_1,0))^2\,dx_1 \leq 2\left[\left(\int_D \int_0^1 f^2(x_1,\tau)\,d\tau\,dx_1\right) + \left(\int_D \int_0^1 \left(\frac{\partial f(x_1,s)}{\partial x_2}\right)^2 ds\,dx_1\right)\right]$$

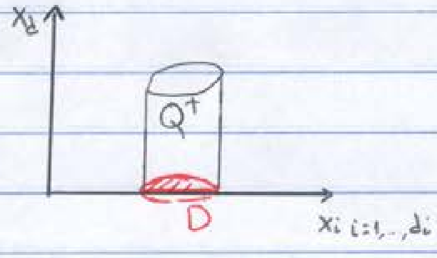
$$\|f\|^2_{L^2(D)} \leq 2\left(\|f\|^2_{L^2(Q^+)} + \left\|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right\|^2_{L^2(Q^+)}\right) \leq 2\,\|f\|^2_{H^1(Q^+)} \Longrightarrow$$

$$\|f\|_{L^2(D)} \leq \sqrt{2}\, \|f\|_{H^1(Q^+)}$$

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 30/4/2018

(β)

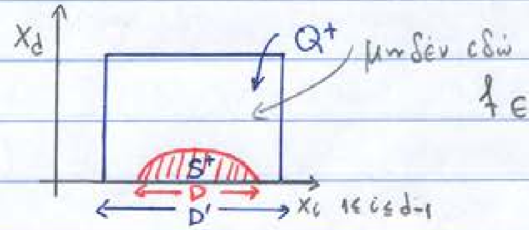




$\forall f \in C^1(\overline{Q}^+)$

$\|f\|_{L^2(D)} \leq C\cdot \|f\|_{H^1(Q^+)}$

(γ)

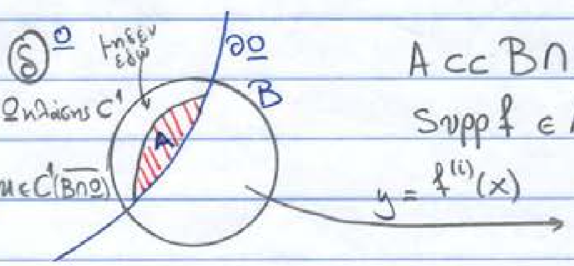


$f \in C^1(\overline{Q}^+)$, $\operatorname{supp} f \subset S^+ \subset\subset \overline{Q^+}$

$\|f\|_{L^2(D)} \leq C \|f\|_{H^1(S^+)}$

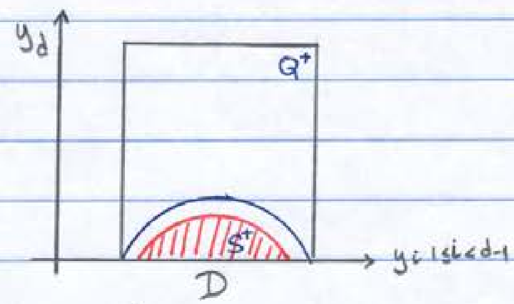
$\|f\|_{L^2(D)} \leq C\cdot \|f\|_{H^1(Q^+)} \leq \|f\|_{H^1(S^+)}$

(δ)



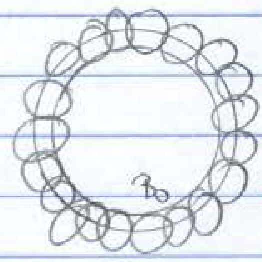
$A \subset\subset B \cap \Omega$

$\operatorname{supp} f \in A$



(γ) $\Longrightarrow \|u\|_{L^2(D)} \leq C(Q^+)\cdot \|u\|_{H^1(S^+)} \xrightarrow{x=(f^{(i)})^{-1}(y)} \|u\|_{L^2(A\cap\partial\Omega)} \leq C(\Omega)\,\|u\|_{H^1(A)}$

(ε) $u\in C^1(\overline{\Omega})$



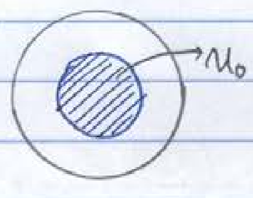
$\Omega \subset B_0 \cup \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ ανοιχτό κάλυμμα του Ω

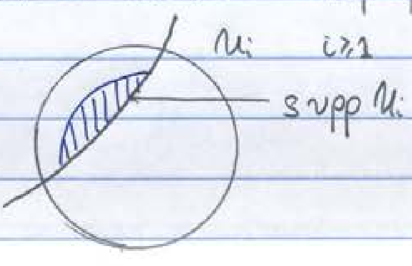
από B_0, B_i $1\leq i\leq n$

$\exists\ \varphi_i \in C_0^\infty(B_i)$ $i=0,\dots,n$ τέτοιο ώστε $\varphi_i \geq 0$

$\sum_{i=0}^{n} \varphi_i(x) = 1$ $x\in\Omega$ διαμέριση του Ω

$u_i = u\cdot\varphi_i|_{\Omega}$



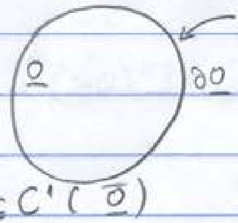


$u = \sum_{i=0}^{n} u_i$ $x\in\Omega$ $\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \cancelto{0}{\|u_0\|_{L^2(\partial\Omega)}} + \|u_1\|_{L^2(\partial\Omega)} + \dots \leq C\cdot\|u\|_{H^1(\Omega)}$

Έχουμε επιτύχει: Αν Ω κλάσης C^1 και $u\in C^1(\overline{\Omega})$

$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\cdot \|u\|_{H^1(\Omega)}$

Μάθημα 21ο ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 7/5/2018



$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ φραγμένο χωρίο

Ω κλάσης C^1

$f \in C^1(\bar{\Omega})$

Θεώρημα Ιχνους: $\exists\, c = c(\Omega) : \|f\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|f\|_{H^1(\Omega)} \;\forall f \in C^1(\bar{\Omega})$

Έστω $f \in H^1(\Omega)$ τι μπορούμε να πούμε.

Από το Θεώρημα της πυκνότητας $\exists\, f_n \in C^\infty(\bar{\Omega}) : f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} f$

Για την ακολουθία f_n ισχύει το Θεώρημα του Ιχνους.

Η $\{f_n\}$ είναι Cauchy στο $L^2(\partial\Omega)$ διότι:

$\|f_n - f_m\|_{L^2(\partial\Omega)} \overset{\text{ΘΙΧ}}{\leq} C\|f_n - f_m\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0 \quad n \to \infty, m \to \infty$

Άρα f_n Cauchy στον $L^2(\partial\Omega)$ Άρα $\exists\, g \in L^2(\partial\Omega) : f_n \xrightarrow{L^2(\partial\Omega)} g$

Άρα $f|_{\partial\Omega} \overset{?}{=} g$

Παρατήρηση: Η g είναι ανεξάρτητη της f_n.

Πράγματι έστω $f_n \xrightarrow[H^1(\Omega)]{} f$, $f_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ και $\tilde{f}_n \xrightarrow[H^1(\Omega)]{} f$, $\tilde{f}_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$

$\exists\, g \in L^2(\partial\Omega)$, $f_n \xrightarrow[L^2(\partial\Omega)]{} g$

$\exists\, \tilde{g} \in L^2(\partial\Omega)$, $\tilde{f}_n \xrightarrow[L^2(\partial\Omega)]{} \tilde{g}$

$\Longrightarrow \|g - \tilde{g}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \|g - f_n\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|\tilde{g} - \tilde{f}_n\|_{L^2(\partial\Omega)} + \|f_n - \tilde{f}_n\|_{L^2(\partial\Omega)}$

- $\|g - f_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \longrightarrow 0$
- $\|\tilde{g} - \tilde{f}_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \longrightarrow 0$
- $\|f_n - \tilde{f}_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \cdot \|f_n - \tilde{f}_n\|_{H^1(\Omega)} \leq C\left(\|f_n - f\|_{H^1(\Omega)} + \|\tilde{f}_n - f\|_{H^1(\Omega)}\right) \longrightarrow 0$

Άρα $\|g - \tilde{g}\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$. Άρα $g = \tilde{g}$ μοναδικό g (δηλαδή εξαρτάται από το f κι f_n)

Θα λέμε ότι $g = f|_{\partial\Omega}$, η g είναι η τιμή της f στο $\partial\Omega$ με την έννοια του ίχνους.

Απόδειξη Θεωρήματος Ιχνους: $f_n \xrightarrow[H^1(\Omega)]{} f$, $f \in C^\infty(\bar{\Omega})$. $f_n \to g$, $g = f|_{\partial\Omega}$

$\|f_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|f_n\|_{H^1(\Omega)} \;\forall n$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\, \|f_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \to \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \text{ και } \cdot\, \|f_n\|_{H^1(\Omega)} \to \|f\|_{H^1(\Omega)} \end{array}\right\} \quad \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|f\|_{H^1(\Omega)}$

Παρατήρηση: $f \in H^1(\Omega)$, $T: H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega)$ $Tf = g$.
Αποδείξαμε ότι $\|Tf\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\|f\|_{H^1(\Omega)}$ (ο T δεν είναι επί στον $L^2(\partial\Omega)$)

Ορίζω: $Ran(T) = H^{1/2}(\partial\Omega) \subsetneq L^2(\partial\Omega)$ και ισχύει $H^1 \subset H^{1/2} \subset L^2$

Εφαρμογές του Θεωρήματος του Ίχνους

Θεώρημα Gauss στο $H^1(\Omega)$

Ω κλάσης C^1 (ισχύει και για Lipschitz) , $u \in H^1(\Omega)$, Ω φραγμένο

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} u\nu_i\,ds \qquad 1\le i\le d$$

Έστω $\varphi_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $\varphi_n \xrightarrow{H^1(\Omega)} u$ $\forall \varphi_n$ ισχύει το Θεώρημα Gauss:

$$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\,dx = \int_{\partial\Omega} \varphi_n \nu_i\,ds$$

• $\int_\Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}dx \longrightarrow \int \frac{\partial u}{\partial x_i}dx$ διότι $\left|\int_\Omega \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)dx\right| \le \int_\Omega \left|\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx \le$

$\le \sqrt{\int_\Omega 1^2}\sqrt{\int\left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx} = \sqrt{\varphi(\Omega)}\,\left\|\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i} - \frac{d u}{\partial x_i}\right\|_{L^2(\Omega)} \le \sqrt{\varphi(\Omega)}\|\varphi_n - u\|_{H^1(\Omega)} \to 0$

$\left|\int_{\partial\Omega}(u-\varphi_n)\nu_i\,ds\right| \le \int_{\partial\Omega}|u-\varphi_n|\,ds \le \sqrt{\int_{\partial\Omega}1^2}\sqrt{\int_{\partial\Omega}(u-\varphi_n)^2 ds} \le$

$\le \sqrt{\varphi(\partial\Omega)}\,\|u-\varphi_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \underset{\Theta.\text{Ιχν.}}{\le} \sqrt{\varphi(\partial\Omega)}\cdot C\cdot \|u-\varphi_n\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0$

Άρα ισχύει το Θεώρημα του Gauss

Τύπος Green

$u,v \in H^1(\Omega)$ $1\le i\le d$ $\int_\Omega u\,\frac{du}{\partial x_i}\,dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}v\,dx + \int u v \nu_i\,ds$

$\varphi_n \xrightarrow{H^1(\Omega)} u$ $\psi_n \xrightarrow{H^1(\Omega)} v$ $\varphi_n, \psi_n \in C^\infty(\overline{\Omega})$

$$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_n \psi_n) = \int_\Omega \varphi_n\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i}dx + \int_\Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\psi_n\,dx$$

$\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi_n \psi_n) = \int \varphi_n\psi_n\nu_i\,ds \longrightarrow \int_{\partial\Omega} u v \nu_i\,ds$

$\int_\Omega \varphi_n\frac{\partial \psi_n}{\partial x_i}dx \longrightarrow \int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx$

$\int_\Omega \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}\psi_n\,dx \longrightarrow \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}v$

ΕΦΜ 4 Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 7/5/2018

Χώρος $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

$$\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) = \overline{C_c^\infty(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}} \qquad \left(\overline{C_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}} = L^2(\Omega)\right)$$

$\forall u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \ \exists \varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$, $\varphi_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} u$, $n \to \infty$

Παρατηρήσεις:

(i) Αν $\Omega = \mathbb{R}^d$ $\overset{\circ}{H}{}^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$ διότι $\overset{\circ}{H}(\mathbb{R}^d) \subset H^1(\mathbb{R}^d)$

Έστω $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $\exists \varphi_n \xrightarrow[\|\cdot\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}]{} v$, όπου $\varphi_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. Άρα $H^1(\mathbb{R}^d) \subset \overset{\circ}{H}{}^1(\mathbb{R}^d)$

(ii) Γενικά αν $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ τότε $\overset{\circ}{H}(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$ (υπάρχουν άπειρα σύνολα $\overline{\Omega} \subsetneq \mathbb{R}^d$ τέτοια ώστε $\overset{\circ}{H}(\overline{\Omega}) = H^1(\Omega)$)

Για φραγμένα χωρία ΠΑΝΤΑ $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$

Θεώρημα: $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ φραγμένο χωρίο κλάσης C^1,
$\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega),\ u|_{\partial\Omega} = 0$ (με την έννοια του ίχνους στο σύνορο η $u=0$)$\}$

Απόδειξη:

• $u \in \overset{\circ}{H}(\Omega) \Rightarrow u \in H^1(\Omega)$, $u|_\Omega = 0$ (εύκολο) $\exists \varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$. $\varphi_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} u$

Θ. ίχνους $\|\varphi_n - u\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\|\varphi_n - u\|_{H^1(\Omega)} \longrightarrow 0$ όμως $\varphi_n|_{\partial\Omega} = 0$.

Άρα $\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} = 0 \Rightarrow u|_{\partial\Omega} = 0$ με την έννοια του ίχνους

• $u \in H^1(\Omega)$, $u|_{\partial\Omega} = 0 \Rightarrow u \in \overset{\circ}{H}(\Omega)$ $(\exists \varphi_n\ C_c^\infty(\Omega), \varphi_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{} u)$

Βασικό βήμα $u \in \overset{\circ}{H}(\Omega) \Leftrightarrow \tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^d - \Omega \end{cases}$ $\quad \tilde{u}(x) \in H^1(\Omega)$

Ανισότητα Poincaré – Freidrichs

Ω φραγμένο, κλάσης C^1

$\exists C^* = C^*(\Omega)$ τέτοιο ώστε $\|u\| \le C^* \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2}$ $\forall u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$

Παρατήρηση: $|u|_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2}$ ημινόρμα στον $H^1(\Omega)$

Παρατήρηση: Απο P-F $\|u\|^2 \leq C^* \sum_{i=1}^{d} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2$

$\|u\|^2 + \sum_{i=1}^{d} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2 \leq (C^*+1) \sum_{i=1}^{d} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2 \Rightarrow |u|_1 \leq \|u\|_1 \leq c\,|u|_1 \;\; \forall u \in \overset{\circ}{H}{}^1$

Στον $\overset{\circ}{H}{}^1$ η $|\cdot|_1$ είναι νόρμα ισοδύναμη με την $\|\;\|_1$ νόρμα

Απόδειξη Poincaré-Freidrichs

$\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ $\quad \sum_{i=1}^{d} \int x_i \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\varphi^2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i \varphi^2) - \varphi^2 \, dx$

$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \int_{\partial\Omega} x_i \cancel{\varphi^2} \nu_i \, ds - \frac{d}{2} \int_\Omega \varphi^2$

Άρα $-\frac{d}{2}\|\varphi\|^2 = \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega x_i \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \Rightarrow \|\varphi\|^2 = -\frac{2}{d} \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega x_i \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \leq \frac{2}{d} \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega |x_i||\varphi|\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right| dx$

$\overset{\max x_i \leq C(\Omega)}{\underset{CS}{\leq}} \frac{2}{d} C(\Omega) \sum_{i=1}^{d} \|\varphi\| \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\| = C'(\Omega) \|\varphi\| \sum_{i=1}^{d} \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\| \leq C'(\Omega) \|\varphi\| \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\|^2} \sqrt{d}$

Άρα $\exists\, C = C(\Omega)$, $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$: $\|\varphi\| \leq C \sqrt{\sum_{i=1}^{d} \|\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\|^2} = C|\varphi|_1$

$u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ $\;\exists\, \varphi_n \in C_c^\infty(\Omega)$: $\varphi_n \xrightarrow{H^1(\Omega)} u$ $\quad (\varphi_n \xrightarrow{L^2} u)$

$\|\varphi_n\| \leq C|\varphi_n|_1 \longrightarrow \|u\| \leq C|u|_1$

Θα μιλήσουμε στα επόμενα μαθήματα για $H^m(\Omega)$, $m \geq 1$. Χρειαζόμαστε πολυδείκτες

Πολυδείκτης.

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ $\;\alpha_i$ ακέραιος ≥ 0. $\quad |\alpha| = \sum_{i=1} \alpha_i$ (τάξη)

$u = u(x_1, \dots, x_d)$ $\quad u: \Omega \to \mathbb{R}$

$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$ $\qquad$ π.χ $d = 2$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ $\quad |\alpha| = 2$.

$\alpha = (0,0) \longrightarrow u$

$\alpha = (1,0) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_1}$ $\qquad \alpha = (0,1) \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_2}$

$\alpha = (1,1) \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}$ $\qquad \alpha = (2,0) \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_1}$ $\qquad \alpha = (0,2) \longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_2}$.

Μάθημα 22ο ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 8/5/2018

$\varphi = \varphi(x_1, \dots, x_d)$

α πολυδείκτης $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ α_i ακέραιος $|\alpha| = \sum_{i=1}^{d} \alpha_i$ (η τάξη)

$$D^\alpha \varphi = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \varphi$$

D^α_φ $|\alpha| < m$ (α_1, α_2): $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ $\alpha_1 + \alpha_2 = m$

$H^m(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, m ακέραιος $m \geq 2$

Για $d=1$ $\Omega = I$ ορίσαμε $H^m(I) = \{u \in L^2 : \exists g_i \in L^2(I), 1 \leq i \leq m : \int_I u \varphi^{(i)} = (-1)^i \int_I g_i \varphi \ \forall \varphi \in C_c^\infty(I)\}$

$H^m(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ με $|\alpha| \leq m$ $\exists g_\alpha \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u \cdot D^\alpha \varphi = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}$

Άρα $H^m(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

$g_\alpha \in L^2$ (μοναδικές) := γενικευμένες παράγωγοι της u τάξης α, με την έννοια του L^2, $g_\alpha = D^\alpha u$

$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \ \exists g_i \in L^2(\Omega) : \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \ \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)\}$ ή αλλιώς

$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), 1 \leq i \leq d\}$

$H^2(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \ 1 \leq i, j \leq d\}$ ή με άλλο τρόπο

$H^2(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\Omega)\}$

και γενικά

$H^m(\Omega) = \{u \in H^{m-1}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^{m-1}(\Omega)\}$

$u, v \in H^m(\Omega)$, $(u,v)_m = \sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)$ πχ για $m=1$ $(u,v)_1 = (u,v) + \sum_{i=1}^{d} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i}\right)$

$\|u\|_m = \sqrt{(u,u)_m} = \sqrt{\sum_{\alpha : |\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^2}$ Ο $H^m(\Omega)$ με $(\cdot,\cdot)_m$ είναι χώρος Hilbert.

Αν είμαστε στον H^2 τότε $\|u\|_2 = \|u\|^2 + \sum_{i=1}^{d} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{d} \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right\|^2$

$\underline{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^d$, φραγμένο χωρίο κλάσης C^1

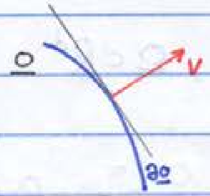
$$H^2(\underline{\Omega}) = \left\{ u \in L^2(\underline{\Omega}), \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\underline{\Omega}), \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\underline{\Omega}) \right\} = \left\{ u \in H^1(\underline{\Omega}) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\underline{\Omega}) \right\}$$

αν $u \in H^2(\underline{\Omega}) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\underline{\Omega})$

Γνωρίζουμε ότι τα στοιχεία του H^1 έχουν ίχνος, άρα έχει νόημα να μιλήσουμε με την έννοια του ίχνους για $u|_{\partial\underline{\Omega}}$ αλλά και $\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{\partial\underline{\Omega}}$

Κάθετη παράγωγος του u.

Αν ν το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $(\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)')$



$$\frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\underline{\Omega}} = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \Big|_{\partial\underline{\Omega}}$$

ν_i L^2 φραγμένη συνάρτηση

$|\nu_i| \leq |\nu| = 1$

άρα $\exists \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial\underline{\Omega}}$ με την έννοια του ίχνους (αν $u \in H^2$)

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}$$

Ξέρουμε τον τύπο Green $\int_{\underline{\Omega}} \frac{\partial f}{\partial x_i} g = -\int_{\underline{\Omega}} f \frac{\partial g}{\partial x_i} + \int_{\partial\underline{\Omega}} f \cdot g \, \nu_i \, ds$, $f, g \in H^1(\underline{\Omega})$

Έστω $u \in H^2(\underline{\Omega})$ και $v \in H^1(\underline{\Omega})$ $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in H^1(\underline{\Omega})$. Αν πάρω τον τύπο του Green για $f = \frac{\partial u}{\partial x_i}$

$$\int_{\underline{\Omega}} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v = -\int_{\underline{\Omega}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_{\partial\underline{\Omega}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_i \cdot v \, ds$$

Παίρνω άθροισμα ως προς i

$$\int_{\underline{\Omega}} \Delta u \cdot v = \underbrace{-\sum_{i=1}^{d} \int_{\underline{\Omega}} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i}}_{\text{Μορφή Dirichlet}} + \int_{\partial\underline{\Omega}} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, ds$$

Ο H^m είναι η πλήρωση το $C^\infty(\overline{\underline{\Omega}})$ με την $\|\cdot\|_m$ $\left(H^m(\underline{\Omega}) = \overline{C^\infty(\overline{\underline{\Omega}})}^{\|\cdot\|_m}\right)$

$\overset{\circ}{H}{}^m(\underline{\Omega}) = \overline{C_c^\infty(\underline{\Omega})}^{\|\cdot\|_m}$

Παρατήρηση: Αν $\underline{\Omega}$ κλάσης C^m τότε ο $\overset{\circ}{H}{}^m(\underline{\Omega}) = \{ u \in H^m(\underline{\Omega}) : D^\alpha u|_{\partial\underline{\Omega}} = 0, \ 0 \leq |\alpha| \leq m-1 \}$

π.χ. ο $\overset{\circ}{H}{}^2(\underline{\Omega}) = \left\{ u \in H^2(\underline{\Omega}) : u|_{\partial\underline{\Omega}} = 0, \ \frac{\partial u}{\partial x_i}\Big|_{\partial\underline{\Omega}} = 0 \right\}$ $\Leftarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\underline{\Omega}} = 0$

$\neq H^2(\underline{\Omega}) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\underline{\Omega}) = \{ u \in H^2(\underline{\Omega}), u|_{\partial\underline{\Omega}} = 0 \}$

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 8/5/2018

Θεώρημα Sobolev

Όταν είχαμε $I=(\alpha,\beta)$, $\exists$ C σταθερά τέτοια ώστε
$\max_{\alpha\le x\le\beta}|u(x)| \le C\cdot\|u\|_{H^1(I)} \quad \forall u\in H^1(I)$

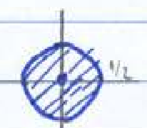
$H^1\subset C^0$, $H^2\subset C^1$, ..., $H^m\subset C^{m-1}$ $m\ge 1$

$\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$ φραγμένο χωρίο κλάσης C^m. Είναι ο $H^m(\Omega)\subset C^k(\Omega)$?

Θεώρημα Sobolev: Έστω $m>d/2$ τότε $H^m(\Omega)\subset C^k(\bar\Omega)$ όπου $0\le k<m-d/2$ και υπάρχει C σταθερά τέτοια ώστε $\underbrace{\max_{\substack{x\in\Omega\\ \alpha:|\alpha|\le k}}|D^\alpha u(x)|}_{\|u\|_{C^k(\Omega)}}\le C\cdot\|u\|_{H^m(\Omega)}\ \forall u\in H^m(\Omega)$

• $d=2$ $H^m(\Omega)\subset C^k(\bar\Omega)$ $m>1$ $0\le k<m-1 \Rightarrow k=0\Rightarrow m\ge 2$
Για να πάρω συνεχείς συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^2$ πρέπει να είμαι τουλάχιστον στον H^2
• $d=3$ $H^m(\Omega)\subset C^k(\Omega)$ $d>3/2$, $m>3/2$ $(m\ge 2)$ $\Omega\in\mathbb{R}^3$ πρέπει να έχω τουλάχιστον H^2 για να πάρω συνεχείς συναρτήσεις.

$H^1(D)$ $D_{1/2}=\{x\in\mathbb{R}^2:|x|\le 1/2\}$



$u=\left(\log\frac{1}{|x|}\right)^\alpha$ $0<\alpha<1/2$
$|x|=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$

$u\notin C^0(D_{1/2})$ και όχι φραγμένη $u\in H^1(D_{1/2})\longrightarrow u\in L^2(D_{1/2})$
$\frac{\partial u}{\partial x_i}\in L^2(D_{1/2})\rightarrow \iint_{D_{1/2}}\left(\ln\frac{1}{|x|}\right)^{2\alpha}dx<\infty$ (πολικές συντεταγμένες) $\Longrightarrow$
$=2\pi\int_0^{1/2}\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{2\alpha}\cdot r\,dr<\infty$

Θεώρημα Grisvard: Ω Lipschitz, $\Omega\subseteq\mathbb{R}^d$, $f\in H^{s_1}$, $g\in H^{s_2}\Longrightarrow f\cdot g\in H^{s_3}$. $s_3=?$
Αν $s_1\ge s_3$, $s_2\ge s_3$ $s_1+s_2-s_3>d/2$ τότε ισχύει η "$\Longrightarrow$" και
$\|f\cdot g\|_{H^{s_3}}\le C\|f\|_{H^{s_1}}\cdot\|g\|_{H^{s_2}}$

Δίνεται Ω κλάσης C^1, υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ φραγμένο.
Ζητάμε $u=u(x_1,\dots,x_d)$ $x\in\Omega$ τ.ω

$$\begin{cases}-\Delta u+u=f & x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}\qquad \Delta u=\sum_{i=1}^d\frac{\partial^2 u}{\partial x_i}$$

- $f \in C(\overline{\Omega})$ έχω κλασσική λύση $u \in C^2(\overline{\Omega})$ πληροί την ΔΕ και ΣΣ με την συνήθη έννοια

- $f \in L^2(\Omega)$ u ασθενής λύση, $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ που πληροί

$$\alpha(u,v) = (f,v) \quad \forall\, v \in H^{01}(\Omega)$$

$$\alpha(v,w) = \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx + \int_\Omega v w \, dx$$

(i) Αν $f \in C(\overline{\Omega})$ u κλασσική λύση $\Longrightarrow$ u ασθενής λύση.

(ii) $f \in L^2(\Omega)$ $\exists!$ ασθενής λύση $u \in H^{01}$

(iii) $f \in L^2$ η ασθενής λύση $u \in H^2 \cap H^{01}$, $\|u\|_2 \leq C \cdot \|f\|$

(κατάλληλα ομαλή fσ την κλασσική έννοια)

(iv) Αν $f \in C(\overline{\Omega})$ και η ασθενής λύση $u \in C^2(\overline{\Omega})$ τότε είναι και κλασσική.

Μάθημα 23ο ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 14/5/2018

Ζητάμε $u=u(x)$, $x=(x_1,\dots,x_d)$, $x\in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ φραγμένο χωρίο κλάσης C^1 που να πληροί το

$$(*)\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{στο } \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

u κλασσική λύση, $u\in C^2(\overline{\Omega})$, $f\in C(\overline{\Omega})$

$u\in \overset{o}{H}{}^1(\Omega)$, $f\in L^2(\Omega)$ ασθενής λύση αν $B(u,v)=(f,v)$ $\forall$ $v\in \overset{o}{H}{}^1(\Omega)$ με

$$B(v,w)=\sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx + \int_\Omega vw, \quad v,w\in \overset{o}{H}{}^1(\Omega)$$

① Έστω $f\in C(\overline{\Omega})$, u κλασσική λύση του (*), τότε u ασθενής λύση

$-\Delta u + u = f$ πολλαπλασιάζω με $v\in \overset{o}{H}{}^1$ και ολοκληρώνω $\Longrightarrow$

$-\int_\Omega \Delta u\cdot v + \int_\Omega u\cdot v = \int_\Omega f\cdot v$

και ξέρουμε

$$-\int_\Omega \Delta u\cdot v = \sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} - \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \nu}\cancelto{0}{v}\,ds \quad (\text{αφού } v\in \overset{o}{H}{}^1)$$

Έστι έχουμε

$$\sum_{i=1}^d \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \int_\Omega uv = (f,v) \qquad \forall\, v\in \overset{o}{H}{}^1$$

② $f\in L^2(\Omega)$ τότε $\exists!$ $u\in \overset{o}{H}{}^1$ που είναι ασθενής λύση του (*). Επιπλέον $\|u\|_1 \le C\cdot\|f\|$ (C σταθερά ανεξ. u, f)

Απόδειξη από Lax-Milgram $\overset{o}{H}{}^1$, $(\cdot,\cdot)$ ο χώρος Hilbert που θα διαλέγαμε

$B(\cdot,\cdot)$ διγραμμική μορφή στον $\overset{o}{H}{}^1\times \overset{o}{H}{}^1$. Πληροί τις προϋποθέσεις για το Lax-Milgram.

(i) $|B(v,w)|\le C_1\|v\|_1\|w\|_1 \quad \forall\, v,w\in \overset{o}{H}{}^1$

$$|B(v,w)|\le \sum_{i=1}^d \int_\Omega \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|\left|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right| + \int_\Omega |v||w| \overset{C\text{-}S}{\le} \sum_{i=1}^d \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|\left\|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\| + \|v\|\|w\|$$

$$\le \sqrt{\sum_{i=1}^d \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|^2 + \|v\|^2}\sqrt{\sum_{i=1}^d \left\|\frac{\partial w}{\partial x_i}\right\|^2 + \|w\|^2} = \|v\|_1\|w\|_1$$

(ii) $\exists\, C_2>0 : B(v,v)\ge C_2\|v\|_1^2 \quad \forall\, v\in \overset{o}{H}{}^1$ (Αν στο (*) δεν υπήρχε το u, θα χρησιμοποιούσα P-F)

$B(v,v)=\sum_{i=1}^d \int_\Omega \left(\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)^2 + \int_\Omega v^2 = \|v\|_1^2$ ισχύει ως ισότητα με $C_2=1$

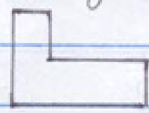
(iii) $|F(v)| = |(f,v)| \le \|f\|\,\|v\| \le \|f\|_1\cdot\|v\|_1$

Άρα από Lax-Milgram $\exists!$ $u\in \overset{o}{H}{}^1$ ασθενής λύση και $\|u\|_1 \le \frac{C_1}{C_2}\|f\|$

3 Ασθενής λύση $u \in H^2 \cap H^{01}$ και $\|u\|_2 \le C\|f\|$

Χρειαζόμαστε Ω κλάσης C^1 τουλάχιστον και ισχύει για κυρτά πολυγωνικά χωρία στον $\mathbb{R}^2$

π.χ δεν ισχύει η ελλειπτική ομαλότητα για το



4 Αν $f \in C(\Omega)$, η ασθενής λύση υπό επιπλέον υποθέσεις, $u \in C^2(\bar{\Omega})$ και είναι κλασσική λύση.

Galerkin $S_h \in H^{01}(\Omega)$ $\dim S_h < \infty$

Ψάχνω $u_h \in S_h$, $B(u_h, \varphi) = (f, \varphi)$ $\forall \varphi \in S_h$

$\exists!\, u_h \in S_h$ (Εφαρμόζω Lax-Milgram, $S_h, (\cdot,\cdot)$)

$\{\varphi_i\}_{i=1}^{N}$ Βάση του S_h $u_h = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i$

συμμετρικός θετικά ορισμένος $A_{N\times N} \cdot C_{N\times 1} = F_{N\times 1}$ $\quad A_{i,j} = B(\varphi_i, \varphi_j)$, $F_i = (f, \varphi_i)$

$\|u - u_h\|_1 \le C \cdot \inf_{x \in S_h} \|u - x\|_1$

Προσεγγιστική Ιδιότητα στον S_h

Δεδομένου $v \in H^2 \cap H^{01}$ $\exists$ $\chi \in S_h$ τέτοιο ώστε

$\|v - \chi\| + h\|v - \chi\|_1 \le C \cdot h^2 |v|_2$ (C σταθερά ανεξάρτητη των v και h)

$|v|_2 = \sqrt{\|v_{xx}\|^2 + \|v_{yy}\|^2 + \|v_{xy}\|^2}$ (όλες οι γενικευμένες παράγωγοι $D^\alpha v$ τάξης $|\alpha| = 2$)

Αν ισχύουν όλες αυτές οι συνθήκες τότε $u \in H^2 \cap H^{01}$ η ασθενής λύση

$\|u - u_h\|_1 \le C\, h\, |u|_2$

Από Nitsche $\|u\|_2 \le c\|f\|$ ← χρειαζόμαστε ελλειπτική ομαλότητα

$\|u - u_h\| \le C\, h^2 |u|_2$

$e = u - u_h$

$B(\psi, v) = (e, v)$ $\forall v \in H^{01}$

$\psi \in H^2 \cap H^{01}$

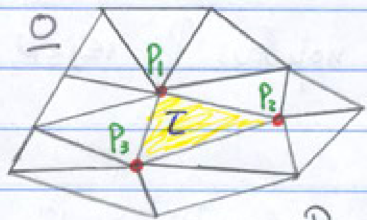
$\|\psi\|_2 \le c \cdot \|e\|$

$v = e$

ΕΦΜ 4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ   14/5/2018

Εισαγωγή: Πεπερασμένα στοιχεία με κατά τμήματα γραμμικά πολύγωνα στον $\mathbb{R}^2$

Ω πολυγωνικό χωρίο στον $\mathbb{R}^2$



$\{\tau_i\}_{i=1}^{N} = T_h$ τριγωνισμός

τ_i ανοιχτά τρίγωνα

$\tau_i \cap \tau_j = \emptyset \quad \forall\, i \neq j$

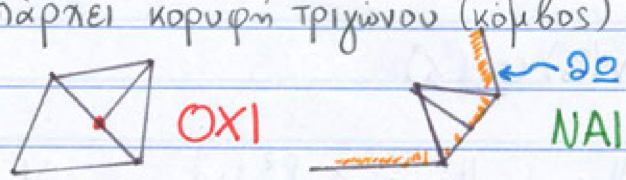
$\Omega = \operatorname{int}\left(\bigcup_{i=1}^{N} \tau_i\right)$ (int A : εσωτερικό του A)

P_i = εσωτερικοί κόμβοι (κορυφές τριγώνων που ανήκουν στο Ω και όχι στο $\partial\Omega$)

Διάμετρος ενός τριγώνου (diam τ): Μήκος μέγιστης πλευράς του τ

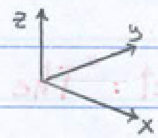
$h = \max_i (\operatorname{diam} \tau_i)$

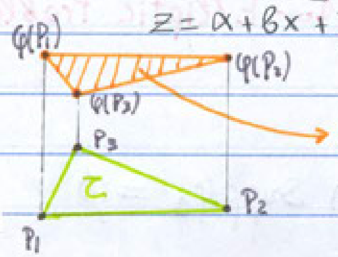
Απαραίτητες ιδιότητες: Δεν υπάρχει κορυφή τριγώνου (κόμβος) που να βρίσκεται στην εσωτερική πλευρά τριγώνου.



$S_h = \{\varphi \in C(\overline{\Omega}),\ \varphi|_{\tau_i} = \alpha_i + \beta_i x + \gamma_i y,\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0\}$

$z = \alpha + \beta x + \gamma y$ επίπεδο στο





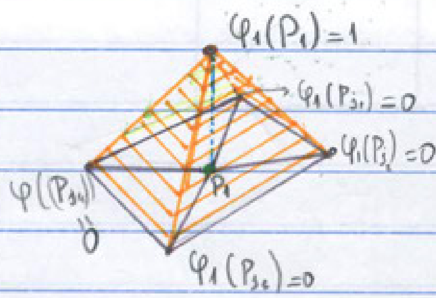
$z = \alpha_\tau + \beta_\tau x + \gamma_\tau y = \varphi(x,y)|_\tau$

$\varphi \in S_h$ ορίζεται μονοσήμαντα από τις τιμές των $\varphi(P_i)$ $1 \le i \le N$

$P_i \in \Omega$ κορυφές εσωτερικών κόμβων.

Έστω $\{P_i\}_{i=1}^{N}$ οι εσωτερικοί κόμβοι

Ορίζω $\underset{1\le i\le N}{\varphi_i \in S_h}$ $\quad \underset{1\le i,j\le N}{\varphi_i(P_j) = \delta_{ij}}$



$\varphi_1(P_j) = 0 \quad \forall j \neq 1$ $\qquad$ supp φ_i = Τα τρίγωνα που έχουν το P_i ως κορυφή

$P_j = (x_j, y_j)$

Γραμμικά Ανεξάρτητες

$\sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \qquad x = P_j \quad 1 \le j \le N \Longrightarrow \sum_{j=1}^{N} c_i \varphi_i(P_j) = 0 \quad \forall 1 \le i,j \le N \Longrightarrow c_i = 0.$

Παράγουν τον χώρο

$\psi \in S_h \longleftarrow$ Μονοσήμαντα ορίζεται από τις τιμές στους εσωτερικούς κόμβους P_j $1 \le j \le N$.

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\psi(P_i)}_{c_i} \cdot \varphi_i(x) \qquad x = P_j$$

Είναι στο S_h και έχουν τις ίδιες τιμές $\psi(P_j)$ στους εσωτερικούς κόμβους P_j

Στη μέθοδο Galerkin Υπόχωρος του $H^{01} = S_h$ $\quad v \in C(\overline{\Omega})$, $v|_{\partial\Omega} = 0$

Παρεμβάλλουσα του v στο S_h

$I_h(v) \in S_h \qquad (I_h v)(P_i) = v(P_i) \qquad 1 \le i \le N$

$$(I_h v)(x) = \sum_{j=1}^{N} v(P_j)\, \varphi_j(x)$$

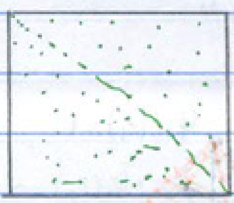
$$\|v - I_h v\|_{L^2} + h\|v - I_h v\|_{H^1} \le C h^2 |v|_2 \qquad \forall v \in H^2 \cap H^{01}$$

*Philippe G. Ciarlet: "The Finite Element Method for Elliptic Problems"

$A\,C = F$

$A_{ij} = B(\varphi_i, \varphi_j) \to 0$ όταν $\operatorname{supp}\varphi_i \cap \operatorname{supp}\varphi_j = \emptyset$

$A_{ij} = B(\varphi_i, \varphi_j) \to \dots$

$A =$ 

Μάθημα 24ο ΕΦΜ.4 Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 15/5/2018

Θεωρούμε το ελλειπτικό πρόβλημα:

$\begin{cases} -\Delta u + u = f & , x \in \Omega \text{ (φραγμένο χωρίο στον } \mathbb{R}^d \text{ κλάσης } C^1) \\ u|_\partial = 0 \end{cases}$

Αν $f \in C(\bar{\Omega})$, κλασσική λύση η $u \in C^2(\bar{\Omega})$ που πληροί το πρόβλημα

Αν $f \in L^2(\Omega)$ ασθενής λύση $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ και πληροί $B(u,v) = (f,v)$ $\forall v \in \overset{\circ}{H}{}^1$

$B(v,w) = \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} + \int_\Omega v w$, $v,w \in \overset{\circ}{H}{}^1$

Δείξαμε ότι:

1) Αν $f \in C(\bar{\Omega})$ και u κλασσική λύση τότε u ασθενής λύση

2) $f \in L^2(\Omega)$ υπάρχει μοναδική ασθενής λύση $u \in \overset{\circ}{H}{}^1$, $\|u\|_1 \le c \cdot \|f\|$

3α) Ομαλότητα σε χώρους Sobolev της ασθενούς λύσης.

Αν $f \in L^2(\Omega)$ και Ω είναι κλάσης C^2 τότε η ασθενής λύση $u \in H^2 \cap \overset{\circ}{H}{}^1$ και $\|u\|_2 \le C \|f\|$ (ανισότητα ελλειπτικής ομαλότητας)

Παρατήρηση: Το C^2 μπορεί να αντικατασταθεί με ασθενέστερη υπόθεση π.χ $d=2$ Ω πολυγωνικό χωρίο κυρτό

Pierre Grisvard : "Elliptic Problems in Nonsmooth Domains"

Επίσης αν $f \in H^m(\Omega)$ και Ω κλάσης C^{m+2} τότε η ασθενής λύση $u \in H^{m+2} \cap \overset{\circ}{H}{}^1$ και $\|u\|_{m+2} \le C_m \|f\|_m$

Θεώρημα Sobolev $H^j(\Omega) \subset C^k(\bar{\Omega})$ j,k ακέραιο >0 πρέπει $j > d/2$ και $0 \le k < j - d/2$

3β) Πότε είναι η ασθενής λύση στοιχείο του $C^2(\bar{\Omega})$;

$f \in H^m \Rightarrow u \in H^{m+2}$ $m \geq 0$ $H^{m+2} \overset{??}{\subset} C^2(\bar{\Omega})$

πρέπει $0 \le 2 < m + 2 - d/2 \Rightarrow m > d/2$.

Αν $d=2$ $m>1$: $m \geq 2$

$d=3$ $m > 3/2$: $m \geq 2$

Παρατήρηση: Έστω $m > d/2$, $f \in H^m \Longrightarrow u \in H^{m+2} \cap \overset{\circ}{H}{}^1 \overset{\text{Sobolev}}{\Longrightarrow} u \in C^2(\bar{\Omega}), u|_{\partial\Omega} = 0$

$f \in C^0(\bar{\Omega})$

Προσοχή: Δεν ισχύει ότι $f \in C(\bar{\Omega}) \Rightarrow u \in C^2(\bar{\Omega})$ (πρέπει $f \in C^{0,\alpha}_{0<\alpha<1} \Rightarrow u \in C^{2,\alpha}$)

④ Αν η ασθενής λύση $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ τότε η u κλασσική λύση $(f \in C(\overline{\Omega}))$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}} + \int_\Omega u \cdot \varphi = \int_\Omega f \cdot \varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\hookrightarrow -\int_\Omega \Delta u \varphi + \cancel{\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} \varphi ds} \quad \int_\Omega u \cdot \varphi = \int_\Omega f \varphi$$

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)\varphi = 0 \qquad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

Επειδή είναι πυκνό στον $L^2 \Longrightarrow -\Delta u + u = f$ στον L^2

Άρα $-\Delta u + u = f$ παντού $\Longrightarrow$ κλασσική λύση.

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, & x \in \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial v} = 0, & \text{στο } \partial\Theta \end{cases}$$

$f \in C(\Omega)$ κλασσική λύση $u \in C^2(\overline{\Omega})$ πληροί την Δ.Ε και τις σσ $\forall x \in \Omega$

$f \in L^2(\Omega)$ ασθενής λύση $u \in H^1(\Omega)$ τέτοια ώστε $B(u,v) = (f,v)$ $\forall v \in H^1$

① $-\int_\Omega \Delta u v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$, $v \in H^1$

$B(u,v) - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} v ds \ldots\ldots$

② Ότι και για Dirichlet

③α Ότι και για Dirichlet

③β $m > d/2$, $m \in \mathbb{Z}^+$

$$f \in H^m \Longrightarrow u \in H^{m+2} \subset C^2(\overline{\Omega})$$
$$\Downarrow$$
$$f \in C(\overline{\Omega})$$

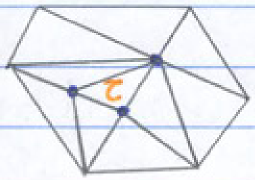
④ $f \in C(\Omega)$, $u \in C^2(\Omega)$ $\exists \left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{\partial\Omega}$

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot \varphi + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} \varphi ds + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

$$\int_\Omega (-\Delta u + u - f)\varphi = 0 \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Rightarrow \Delta u + u = f, \quad \varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \Longrightarrow \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial v} \varphi ds = 0 \quad \left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{\partial\Omega} = 0$$

ΕΦΜ4. Αριθμητικές Μέθοδοι για ΜΔΕ 15/5/2018

$$S_h = \{\varphi \in C(\bar{\Omega}),\ \varphi|_\tau = \alpha_\tau + \beta_\tau x + \gamma_\tau y,\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0\} \subset \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$$



$v \in S_h$, $v \in L^2(\Omega)$ $\quad v_\tau = v|_\tau \quad v_\tau \in \mathbb{P}_1(\tau)$

για να δείξω ότι $v \in H^1$ πρέπει να δείξω ότι $\exists\, g_i \in L^2(\Omega)$:

$$\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \quad i=1,2.$$

υποψήφια g_i, $i=1,2$.

$g_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}(v_\tau(x))$ αν $x \in \tau$ $\longrightarrow$ $g_1(x) = \beta_\tau$ αν $x \in \tau$ $\quad g_i \in L^2(\Omega)$

$g_2(x) = \gamma_\tau$ αν $x \in \tau$

$$\int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \sum_{\tau \in T_h} \int_\tau v_\tau \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \overset{\text{Θεώρημα Gauss για το } \tau}{=} \sum_{\tau \in T_h} \left[-\int_\tau \frac{\partial v_\tau}{\partial x_i}\varphi + \int_{\partial\tau} v_\tau \varphi \nu_i\, ds \right]$$

$$= -\sum_{\tau \in T_h} \int_\tau \underbrace{\frac{\partial v_\tau}{\partial x_i}}_{g_i|_\tau} \varphi + \underbrace{\sum_{\tau \in T_h} \int_{\partial\tau} (v_\tau \varphi \nu_{\tau,i})\, ds}_{=0\ (*)} = -\int_\Omega g_i \varphi$$

Γιατί όμως $(*) = 0$? Αν τ έχει πλευρά AB στο $\partial\Omega$ τότε το αντίστοιχο $\int_{AB} v_\tau \varphi \nu_{\tau,i} = 0$

Άρα μας μένουν μόνο όσα έχουν πλευρά στο εσωτερικό.

Για τις εσωτερικές πλευρές AB έχω ζεύγη ολοκληρωμάτων.

$$\int_{AB} v_{\tau_1} \varphi \nu_{\tau_1,i} + \int_{AB} v_{\tau_2} \varphi \nu_{\tau_2,i} = \int_{AB} v_{AB} \varphi \big(\underbrace{\cancel{\nu_{\tau_1,i} + \nu_{\tau_2,i}}}_{0}\big) = 0$$

Σφάλμα της παρεμβάλλουσας

$v \in C(\bar{\Omega})$, $I_h v \in S_h$ $\quad (I_h v)(P_i) = v(P_i)$ $\ 1 \le i \le N$ $\quad P_i$ = εσωτερικοί κόμβοι

$(I_h v)(x) = \sum_{i=1}^{N} v_i(P_i)\varphi_i(x)$ $\quad \varphi_i(P_j) = \delta_{ij}$

Θα δείξουμε ότι αν ο τριγωνισμός είναι κανονικός τότε

$$\|v - I_h v\|_{L^2(\Omega)} + h\|v - I_h v\|_{H^1(\Omega)} \le C h^2 |v|_{2,\Omega} \quad \forall\, v \in H^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$$

$$|v|_{2,\Omega} = \sqrt{\|v_{xx}\|^2 + \|v_{yy}\|^2 + \|v_{xy}\|^2}$$