ΕΚΠΑ, Τμήμα Μαθηματικών

ΕΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση (2017-18)

Προβλήματα

Στα παρακάτω συμβολίζουμε με $\mathcal{H}$ ένα διαχωρίσιμο χώρο Hilbert.

1. Να δειχθεί ότι η νόρμα

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| \ : \ 0 \le t \le 1\}$$

στον $C([0,1])$ δεν προέρχεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο.

2. Έστω M και N κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$. Να δειχθεί ότι

$$\text{(i)} \qquad (M \cap N)^\perp = \overline{M^\perp + N^\perp}\,, \qquad \text{(ii)} \qquad (M+N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp.$$

3. Στον $L^2(-1,1)$ θεωρούμε τους κλειστούς υπόχωρους

$$L^2_a = \{f \in L^2(-1,1) \ : \ f(-t) = f(t) \ \ \sigma.\pi.\}$$
$$L^2_\pi = \{f \in L^2(-1,1) \ : \ f(-t) = -f(t) \ \ \sigma.\pi.\}$$

Να δειχθεί ότι $L^2(-1,1) = L^2_a \oplus L^2_\pi$.

4. Έστω M ο κλειστός υπόχωρος του l^2 που αποτελείται από ακολουθίες της μορφής $x = (x_1, 2x_1, x1, 0, x_5, x_0, x_7, \ldots)$. (i) Να βρεθεί η γενική μορφή των στοιχείων του $M^\perp$. (ii) Δοθέντος ενός $x \in l^2$ να βρεθούν τα $y \in M$ και $z \in M^\perp$ που είναι τέτοια ώστε $x = y + z$.

5. $(**)$ (i) Έστω $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ χώροι Hilbert. Ορίζουμε

$$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 = \{(x_1, x_2) \ : x_1 \in \mathcal{H}_1\,, \ x_2 \in \mathcal{H}_2\}.$$

Το σύνολο αυτό γίνεται κατά φυσικό τρόπο γραμμικός χώρος. Δείξτε ότι αν ορίσουμε και το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle,$$

τότε ο $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ γίνεται χώρος Hilbert. (ii) Επεκτείνετε τον παραπάνω ορισμό στην περίπτωση μίας ακολουθίας $(\mathcal{H}_n)_{n=1}^\infty$ χώρων Hilbert και ορίστε τον $\oplus_{n=1}^\infty \mathcal{H}_n$. Αποδείξτε ότι ο $\oplus_{n=1}^\infty \mathcal{H}_n$ είναι χώρος Hilbert. Αποδείξτε επίσης ότι αν όλοι οι $\mathcal{H}_n$, $n \in \mathbb{N}$, είναι διαχωρίσιμοι, τότε και ο $\oplus_{n=1}^\infty \mathcal{H}_n$ είναι διαχωρίσιμος.

6. Έστω στον χώρο l^2 ο τελεστής S της δεξιάς μετατόπισης,

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

(i) Να βρεθούν οι S^*, S^*S και SS^*. (ii) Να δειχθεί ότι

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \|(S^*)^n\| = 1 \text{ για κάθε } n \text{ και } (S^*)^n x \to 0 \text{ για κάθε } x \in l^2 \\ &(2) \qquad \|S^n x\| = \|x\| \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N} \text{ και } x \in l^2 \\ &\qquad\qquad \text{και επίσης } \langle S^n x, y\rangle \to 0 \text{ για κάθε } x, y \in l^2 \end{aligned}$$

7. Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τελεστής για τον οποίο υπάρχει $c > 0$ ώστε $\|Ax\| \geq c\|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα $\mathrm{Ran}(A)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$.

8. Να δειχθεί ότι ο τελεστής A στον $L^2(0,1)$, όπου

$$(Af)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt$$

είναι φραγμένος.

9. Έστω $y \in \mathcal{H}$ και π το φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό

$$\pi(x) = \langle x, y\rangle \ , \quad x \in \mathcal{H} \, .$$

Να βρεθούν οι τελεστές π^*, $\pi^*\pi$ και $\pi\pi^*$.

10. (∗∗) (α) Έστω M κλειστός υπόχωρος του M και P η ορθογώνια προβολή επί του M. Να δειχθεί ότι $P = P^2 = P^*$. (β) Αντίστροφα, να δειχθεί ότι αν $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι τέτοιος ώστε $P = P^2 = P^*$, τότε ο $\mathrm{Ran}(P)$ είναι κλειστός υπόχωρος και ο P είναι η ορθογώνια προβολή επί του $\mathrm{Ran}(P)$.

11. (∗∗) Έστω $k(t,s)$ συνεχής συνάρτηση στο $[0,1] \times [0,1]$. Να βρεθεί ο συζυγής K^* του τελεστή K στον $L^2(0,1)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$(Ku)(t) = \int_0^1 k(t,s) u(s) ds \, .$$

12. Έστω P και Q οι ορθογώνιες προβολές πάνω στους κλειστούς υποχώρους M και N αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{i}) \qquad \langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle \ , \quad x \in \mathcal{H} \\ &(\mathrm{ii}) \qquad \|Px\| \leq \|Qx\| \ , \quad x \in \mathcal{H} \\ &(\mathrm{iii}) \qquad PQ = QP = P \\ &(\mathrm{iv}) \qquad M \subset N. \end{aligned}$$

13. Έστω (a_n) φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $A : l^2 \to l^2$ ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός τελεστής,

$$A(x_1, x_2, \ldots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots) \ .$$

Να δειχθεί ότι ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν $a_n \to 0$.

14. Στον χώρο $L^2(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$) έστω ο πολλαπλασιαστικός τελεστής T που αντιστοιχεί στη συνάρτηση $h \in L^\infty(\Omega)$. Να αποδειχθεί ότι ο T δεν έχει ιδιοτιμές πεπερασμένης πολλαπλότητας. [Θεωρείστε γνωστό από τη θεωρία μέτρου ότι κάθε σύνολο $E \subset \mathbb{R}^n$ θετικού Lesbesgue μέτρου μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων θετικού μέτρου]

15. Έστω $h : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ συνεχής και φραγμένη συνάρτηση και T ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός τελεστής στον $L^2(\Omega)$, $Tf(x) = h(x)f(x)$. Να δειχθεί ότι ο T δεν είναι συμπαγής εκτός αν είναι ο μηδενικός τελεστής.

16. Έστω K συμπαγής τελεστής και (x_n) φραγμένη ακολουθία. Να δειχθεί ότι αν

$$\langle x_n, y \rangle \to \langle x, y \rangle \ , \ \text{για κάθε } y \in \mathcal{H},$$

τότε $Kx_n \to Kx$. [Υπόδειξη: θέσετε $y = K^* z$].

17. Έστω $\mathcal{H}$ απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Να εξεταστεί αν είναι αληθείς οι παρακάτω προτάσεις:

(1) αν $A^n = I$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τότε ο A δεν είναι συμπαγής

(2) αν $AB = 0$ τότε ένας τουλάχιστον από τους A, B είναι συμπαγής

(3) αν T_n συμπαγής, $n \in \mathbb{N}$, και $T_n x \to Tx$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, τότε T συμπαγής

18. Έστω A συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής και $x_0 \in \mathcal{H}$. Θεωρείστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax & t > 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

Αφού ορίσετε πότε μία συνάρτηση $x : [0, +\infty) \to \mathcal{H}$ είναι λύση του π.α.τ., απόδείξτε την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης.

19. Έστω $u : \Omega \to \mathbb{R}$ ασθενώς παραγωγίσιμη και $\psi \in C^\infty$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u\psi$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο Ω και ισχύει ο γνωστός τύπος για την παράγωγο γινομένου.

20. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο και Γ μία λεία επιφάνεια η οποία χωρίζει το Ω σε δύο χωρία Ω_1 και Ω_2. Έστω $u_i \in C^1(\Omega_i) \cap C(\Omega_i \cup \Gamma)$, $i = 1, 2$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση

$$v(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1, \\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases}$$

είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο Ω αν και μόνο αν $u_1 = u_2$ επί της Γ.

21. Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των ομαλοποιητών όπως στη θεωρία, αποδείξτε ότι αν η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο Ω τότε $(u_\epsilon)_{x_k} = (u_{x_k})_\epsilon$ στο Ω_ϵ.

22. Έστω $u(x) = |x|^\alpha$, $x \in B(1)$. Να βρεθεί για ποια $\alpha \in \mathbb{R}$ η u:
(i) Είναι C^1 στη $B(1)$
(ii) Είναι ασθενώς παραγωγίσιμη
(iii) Ανήκει στο $W^{1,p}(B(1))$, όπου $p \geq 1$.

23. Να δειχθεί ότι η ανισότητα Sobolev

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq c\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\,, \quad u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)\,.$$

δεν ισχύει για κανένα $q \neq p^*$.

24. Έστω Ω χωρίο στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \Omega$. Να αποδειχθεί ότι αν $1 \leq p < n$, τότε $W_0^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega \setminus \{0\})$.

25. Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο. Έστω $f, f_1, \ldots, f_n \in L^2(\Omega)$, $\vec{F} = (f_1 \ldots, f_n)$ και $g \in H^1(\Omega)$. Ορίστε κατάλληλα την έννοια της ασθενούς λύσης για το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^n \{a_{ij}(x)u_{x_i}\}_{x_j} = f + \mathrm{div}\vec{F}, & x \in \Omega, \\ u = g, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Στη συνέχεια αποδείξτε την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης.