Μάθημα 1º ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 06/02/2018

Βιβλιογραφία
- Kreyszig: "Introductory Functional Analysis with Applications"
- Brezis: "Functional Analysis, Sobolev spaces and PDEs"
- Young: "An introduction to Hilbert space"
- Καραβόλος: "Θεωρία Τελεστών"
- Reed & Simon: "Vol I Functional Analysis"

1. Χώροι Hilbert

Ορισμός: Ονομάζουμε χώρο εσωτερικού γινομένου, έναν διανυσματικό χώρο X πάνω στο $\mathbb{C}$, εφοδιασμένο με μια απεικόνιση $<\cdot,\cdot>: X\times X \longrightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε:

(i) $<\lambda x+\mu y, z> = \lambda<x,z> + \mu<y,z>$

(ii) $\overline{<x,y>} = <y,x>$ $\quad\quad \forall \lambda,\mu\in\mathbb{C},\ \forall x,y,z\in X$

(iii) $<x,x> \geq 0$ και $<x,x>=0 \Leftrightarrow x=0$

Από (i)-(iii) έπονται:

(iv) $<x, \lambda y+\mu z> = \bar{\lambda}<x,y> + \bar{\mu}<x,z>$

(v) $<x,0> = <0,x> = 0$

Παραδείγματα

① $X=\mathbb{C}^n = \{(z_1,z_2,\dots,z_n) : z_k\in\mathbb{C}\}$ με το εσωτερικό γινόμενο:

$<(z_1,z_2,\dots,z_n),(w_1,w_2,\dots,w_n)> = z_1\cdot\overline{w_1} + z_2\cdot\overline{w_2} + \dots + z_n\overline{w_n} = \sum_{i=1}^{n} z_i\overline{w_i}$

② Ο χώρος $\ell^2 = \{x=(x_1,x_2,\dots), x_k\in\mathbb{C}, \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2<+\infty\}$ με το εσωτερικό γινόμενο:

$<x,y> := \sum_{k=1}^{\infty} x_k\cdot\overline{y_k}$

Η σειρά συγκλίνει απόλυτα, αφού $|x_k\cdot\overline{y_k}| \leq \frac{1}{2}|x_k|^2 + \frac{1}{2}|y_k|^2$

③ Ο χώρος $C([0,1]) = \{f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{C},\ f \text{ συνεχής}\}$ με εσωτερικό γινόμενο $<f,g> := \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\,dt$

Στον χώρο $C^1([0,1])$ με το $<f,g>=\int_0^1 f'(t)\cdot \overline{g'(t)}\,dt$, αυτό δεν είναι εσωτερικό γινόμενο διότι $<f,f>=0 \not\Rightarrow f=0$ (Αφού αν f σταθερή $\Rightarrow f'=0 \Rightarrow <f,f>=0$)

Πρόταση: (Ανισότητα Cauchy-Schwarz)
Για κάθε $x,y\in X$ έχουμε $|<x,y>| \leq <x,x>^{1/2}\cdot <y,y>^{1/2}$

Απόδειξη:

- Αν $<x,y>=0$ τότε προφανώς ισχύει.
- Έστω $<x,y>\neq 0$ γράφουμε σε πολική μορφή: $<x,y>=R\cdot e^{i\theta}$ ①

Έστω $r\in\mathbb{R}$ και έστω $\lambda = r e^{i\theta}$ ② τότε

$|\lambda|^2=\lambda\bar{\lambda}$

$$0\leq <x+\lambda y, x+\lambda y> = <x,x>+\bar{\lambda}<x,y>+\lambda<y,x>+|\lambda|^2<y,y>$$
$$\overset{②}{=} <x,x>+r\cdot e^{-i\theta}<x,y>+re^{i\theta}<y,x>+r^2<y,y> \overset{①}{=} <x,x>+2\cdot r\cdot R+r^2<y,y> \quad \forall r\in\mathbb{R}$$

- Αν $y=0$ τότε $<x,y>=0$ προφανώς ισχύει
- Έστω $y\neq 0$ τότε το τριώνυμο κρατάει το πρόσημο, άρα $\Delta\leq 0$

Όμως $\Delta=(2\cdot R)^2-4<x,x>\cdot<y,y>=4(|<x,y>|^2-<x,x><y,y>)$

Άρα $|<x,y>|^2-<x,x><y,y>\leq 0$ (Το ζητούμενο)

Πρόταση: Κάθε χώρος εσωτερικού γινομένου γίνεται χώρος με νόρμα αν ορίσουμε:
$\|x\| = <x,x>^{1/2}$, $x\in X$

Απόδειξη:

Θα δείξουμε τη μόνη προφανή (Τριγωνική ανισότητα)
Έστω $x,y\in X$, τότε
$$\|x+y\|^2=<x+y,x+y>=<x,x>+<x,y>+<y,x>+<y,y>$$
$$=\|x\|^2+2\,\mathrm{Re}<x,y>+\|y\|^2 \overset{C\text{-}S}{\leq} \|x\|^2+2\cdot\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$$

(Note 2me): Θα χρησιμοποιώ αρκετά το $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2\cdot\mathrm{Re}<x,y>+\|y\|^2$

Παρατήρηση: Η ανισότητα Cauchy-Schwarz γράφεται πλέον
$$|<x,y>|\leq \|x\|\,\|y\|$$

ΕΦΜ 6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 06/02/2018

Πρόταση: Ισχύουν τα εξής:

(1) Κανόνας του παραλληλογράμμου:

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2 = 2\cdot\|x\|^2+2\cdot\|y\|^2$$

(2) Πολική ταυτότητα:

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\cdot\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right]$$

Απόδειξη: Γράφουμε τις νόρμες ως εσωτερικά γινόμενα και μετά κάνουμε τις πράξεις

• Αν έχω νόρμα για την οποία ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου, τότε αυτή επάγεται από εσωτερικό γινόμενο.

Ορισμός: Ονομάζουμε χώρο Hilbert, έναν πλήρη χώρο εσωτερικού γινομένου. Άρα κάθε χώρος Hilbert είναι χώρος Banach

Παραδείγματα

① Ο $\mathbb{C}^n$ είναι χώρος Hilbert (Απλή απόδειξη περιέχεται στην επόμενη)
② Ο ℓ^2 είναι χώρος Hilbert
③ Ο $C([0,1])$ δεν είναι χώρος Hilbert

Πρόταση: Ο ℓ^2 είναι διαχωρίσιμος χώρος Hilbert

(• διαχωρίσιμος $\Leftrightarrow$ έχει αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο
• $A\subseteq X$ πυκνό στον X, αν $\overline{A}=X$, δηλαδή αν $\forall x\in X\ \exists\ (\alpha_n)\subset A$ τω $\alpha_n \to x$)

Απόδειξη:

(i) Πληρότητα

Έστω (α_n) ακολουθία Cauchy στον ℓ^2. Άρα $\forall n\in\mathbb{N}$ $\alpha_n=(\alpha_{n1},\alpha_{n2},\alpha_{n3},\ \ )$ με $\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_{nk}|^2<+\infty$

Σκιαγράφηση της ιδέας της απόδειξης

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & k=3 & \\
\alpha_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots \\
\alpha_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots \\
\alpha_3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
 & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 & b_1 & b_2 & b_3 &
\end{array}$$

Αν πάρω k συγκεκριμένο, θα δείξω ότι αυτή είναι Cauchy και συγκλίνει στο b_k. Έτσι σχηματίζω μια τέτοια ακολουθία και μένει να δείξω $\alpha_n \to (b_1,b_2,b_3,\dots)$

Έστω $\kappa \in \mathbb{N}$. Θα δείξω ότι η ακολουθία $(\alpha_{n\kappa})_n$ είναι Cauchy στο $\mathbb{C}$

Έστω $\varepsilon > 0$ τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω αν $n,m > n_0$ τότε $\|\alpha_n - \alpha_m\| < \varepsilon$ (Από υπόθεση α_n Cauchy στο ℓ^2)

Άρα για $n,m > n_0$ $|\alpha_{n\kappa} - \alpha_{m\kappa}| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_{nj} - \alpha_{mj}|^2\right)^{1/2} = \|\alpha_n - \alpha_m\| < \varepsilon$

Άρα η $(\alpha_{n\kappa})_n$ είναι Cauchy στο $\mathbb{C}$.

Έστω $b_\kappa = \lim_{n\to\infty} \alpha_{n\kappa}$. Θέτουμε $b = (b_1, b_2, \dots)$ Θα δείξουμε ότι $b \in \ell^2$ και $\alpha_n \longrightarrow b$ στον ℓ^2

Αφού η (α_n) είναι Cauchy είναι και φραγμένη ($\exists M > 0$ τω $\|\alpha_n\| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$)

Έστω $j \in \mathbb{N}$, τότε $\sum_{\kappa=1}^{j} |b_\kappa|^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{\kappa=1}^{j} |\alpha_{n\kappa}|^2 \leq M^2$

Άρα $\sum_{\kappa=1}^{\infty} |b_\kappa|^2 < +\infty$, άρα $b \in \ell^2$

Έστω $\varepsilon > 0$, τότε $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ τω αν $n,m > n_0$ τότε $\|\alpha_n - \alpha_m\| < \varepsilon$, δηλαδή $\sum_{\kappa=1}^{\infty} |\alpha_{n\kappa} - \alpha_{m\kappa}|^2 < \varepsilon^2$

Έστω $j \in \mathbb{N}$ τότε για $n,m \geq n_0$ $\sum_{\kappa=1}^{j} |\alpha_{n\kappa} - \alpha_{m\kappa}|^2 < \varepsilon$ παίρνω όριο $m \to \infty$ και προκύπτει $\sum_{\kappa=1}^{j} |\alpha_{n\kappa} - b_\kappa|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall n > n_0$

Άρα $\sum_{\kappa=1}^{\infty} |\alpha_{n\kappa} - b_\kappa|^2 \leq \varepsilon^2$ Δηλαδή $\|\alpha_n - b\| \leq \varepsilon \ \forall n > n_0 \Longrightarrow \alpha_n \to b$

Μάθημα 2ο   ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση   08/02/2018

(ii) Διαχωρισιμότητα

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $A_n = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, 0, \dots) : \alpha_k \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}\}$ και θέτουμε

$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Το A είναι αριθμήσιμο

Θα δείξω ότι A πυκνό. Έστω $b = (b_k) \in \ell^2$ και $\varepsilon > 0$. Θα δείξω ότι υπάρχει $\alpha \in A$ τέτοιο ώστε $\|b - \alpha\| < \varepsilon$.

Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\sum_{i=N+1}^{\infty} |b_i|^2 < \varepsilon$. Για κάθε $i = 1, \dots, N$ $\exists\ \alpha_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $|\alpha_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2N}}$ (από πυκνότητα $\mathbb{Q}$ στο $\mathbb{C}$)

Ορίζουμε $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N, 0, \dots)$, τότε $\alpha \in A$

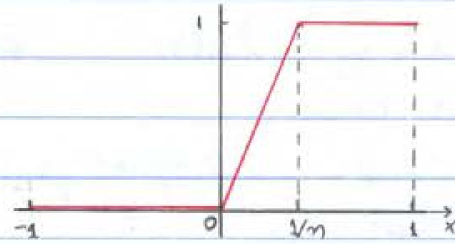
Επίσης $\|\alpha - b\|^2 = \sum_{i=1}^{N} |\alpha_i - b_i|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} |b_i|^2 < \frac{\varepsilon^2}{2N} N + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2$

Άρα $\|b - \alpha\| < \varepsilon$

Πρόταση: Ο $C([-1,1])$ δεν είναι χώρος Hilbert

Απόδειξη:

Ορίζουμε για $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x \le 0 \\ nx, & 0 \le x \le 1/n \\ 1, & 1/n \le x \le 1 \end{cases}$



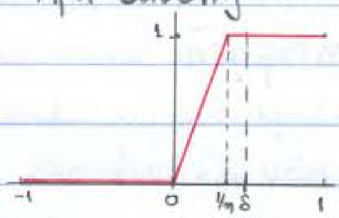
ισχύει $f_n \in C([-1,1])$

Θα δείξουμε ότι η (f_n) είναι Cauchy. Έστω $m, n \in \mathbb{N}$ $n > m$ τότε

$$\|f_n - f_m\|^2 = \int_{-1}^{1} (f_n(x) - f_m(x))^2 dx = \int_0^{1/m} (f_n(x) - f_m(x))^2 dx = \int_0^{1/n} (nx - mx)^2 dx + \int_{1/n}^{1/m} (mx-1)^2 dx =$$

$$= (n-m)^2 \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{3m}\left(1 - \frac{m}{n}\right)^3 \le \frac{1}{3}\frac{n^2}{n^3} + \frac{1}{3m} \le \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{3m} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$ Άρα Cauchy

Έστω $f_n \to f \in C([-1,1])$. Έστω $\delta > 0$. Υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $f_n(x) = 1$ στο $[\delta, 1]$ $\forall n \ge N$



Άρα $\int_\delta^1 |1 - f(x)|^2 dx = \int_\delta^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx \le \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx \le \|f_n - f\|^2 \to 0$

Άρα $f(x) = 1$ στο $[\delta, 1]$. Αφού δ τυχαίο $\Rightarrow f(x) = 1$ στο $[0,1]$.

Όμως παρόμοια προκύπτει $f(x) = 0$ στο $[-1, 0]$. Άρα $f \notin C([-1,1])$ Άτοπο

Παρατήρηση: Παρόμοια έχουμε ότι

(1) Ο $\ell^p = \{x = (x_n) : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < +\infty\}$ $1 \le p < \infty$ είναι πλήρης.

(2) Ο $C([0,1])$ δεν είναι πλήρης για την νόρμα $\|\cdot\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$

Ο χώρος $L^2(\mathbb{R}^n)$

1. Ορίζουμε ένα σύνολο $\mathcal{A}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Τα στοιχεία του $\mathcal{A}$ τα λέμε μετρήσιμα σύνολα

2. Για κάθε σύνολο $E \in \mathcal{A}$ ορίζουμε το μέτρο του E, $\mu(E)$ (για "απλά" σύνολα το $\mu(E)$ ταυτίζεται με το μήκος/εμβαδό/όγκο για $n=1/2/3$)

3. Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ λέγεται μετρήσιμη αν $A \subseteq \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ανοιχτό $\Rightarrow f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$

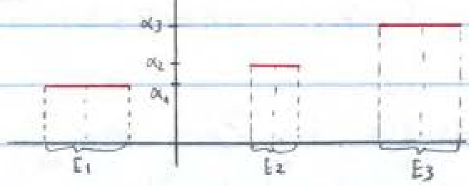
4. Για κάθε "μετρήσιμη" συνάρτηση f ορίζουμε το $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx$. Αυτό γίνεται ξεκινώντας από απλές συναρτήσεις

αν $f(x) = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}(x)$, $E_k \cap E_j = \emptyset$, $k \neq j$

$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$, χαρακτηριστική συνάρτηση του E.

Τότε ορίζουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} a_k \mu(E_k)$$



Στη συνέχεια με κατάλληλο τρόπο επεκτείνεται ο ορισμός για κάθε f μετρήσιμη.

Παρατήρηση: Ισχύει το εξής: Αν $f(x) \geq 0 \ \forall x$ και $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 0$, τότε $f(x)=0$ σχεδόν παντού, δηλαδή $\mu(\{x : f(x) \neq 0\}) = 0$. Σύνολα μέτρου μηδέν είναι (μεταξύ άλλων) όσα έχουν διάσταση γνήσια μικρότερη από την διάσταση του χώρου μας (πχ εδώ $< n$)

5. Ορίζουμε $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n) = \{ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{C},\ f$ μετρήσιμη και $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx < +\infty \}$ (γραμμικός χώρος)

Στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ ορίζουμε $\langle f, g \rangle_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx$

Ισχύουν όλες οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου εκτός από μία

$\langle f, f \rangle_{\mathcal{L}^2} = 0 \Rightarrow f = 0$ σχεδόν παντού (όχι $f = 0$)

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 08/02/2018

6. Ορίζουμε μια σχέση ισοδυναμίας στον $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)$ όπου $f \sim g \Leftrightarrow f(x)=g(x)$ σχεδόν παντού.
Στην συνέχεια ορίζουμε $L^2(\mathbb{R}^n)=\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)/\sim$
Στο $L^2(\mathbb{R}^n)$ ορίζονται πράξεις, καθώς και ολοκλήρωμα μέσω αντιπροσώπων.
Τέλος ορίζουμε $<[f],[g]>_{L^2(\mathbb{R}^n)} = <f,g>_{\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\cdot\overline{g(x)}\,dx$
Αυτό είναι εσωτερικό γινόμενο.
($[f] \rightsquigarrow$ κλάση ισοδυναμίας)

Θεώρημα: Ο $L^2(\mathbb{R}^n)$ είναι χώρος Hilbert

Καθετότητα

Ορισμός: X χώρος με εσωτερικό γινόμενο. Τα $x,y\in X$ λέγονται κάθετα αν $<x,y>=0$

Πρόταση: (Πυθαγόρειο Θεώρημα)
Αν τα $x_1,x_2,\dots,x_n\in X$ είναι κάθετα ανά δύο, τότε:
$\|x_1+x_2+\dots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\dots+\|x_n\|^2$
Απόδειξη:
Π.χ. $n=3$ $\|x_1+x_2+x_3\|^2=<x_1+x_2+x_3,x_1+x_2+x_3> = <x_1,x_1>+<x_1,x_2>+<x_1,x_3>+<x_2,x_1>+<x_2,x_2>+$
$+<x_2,x_3>+<x_3,x_1>+<x_3,x_2>+<x_3,x_3>$. Αφού x_1,x_2,x_3 κάθετα ανά δύο $\Rightarrow <x_i,x_j>=0,\ i\neq j$
Άρα $\|x_1+x_2+x_3\|^2=<x_1,x_1>+<x_2,x_2>+<x_3,x_3> = \|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\|x_3\|^2$

Ορισμός: Έστω $K\subseteq X$, $K\neq\emptyset$ και $a\in X$. Η απόσταση του a από το σύνολο K ορίζεται ως $d(a,K)=\inf\{\|a-x\|,\ x\in K\}$

Υπενθύμιση: K κυρτό $\Leftrightarrow [x,y\in K$ και $\lambda\in[0,1]] \Rightarrow \lambda x+(1-\lambda)y\in K$.

Πρόταση: $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert. Έστω $K \subseteq \mathcal{H}$ κλειστό και κυρτό. Τότε για κάθε $\alpha \in \mathcal{H}$ υπάρχει μοναδικό $x \in K$ ώστε $d(\alpha,K) = \|\alpha - x\|$

Απόδειξη:

(i) Ύπαρξη

Έστω $(x_n) \subseteq K$ τέτοια ώστε $\|\alpha - x_n\| \to d(\alpha,K)$ Εφαρμόζουμε τον κανόνα παραλληλογράμμου στα διανύσματα: $\alpha - x_n$, $\alpha - x_m$

$\|(\alpha-x_n)+(\alpha-x_m)\|^2 + \|(\alpha-x_m)-(\alpha-x_n)\|^2 = 2\|\alpha-x_n\|^2 + 2\|\alpha-x_m\|^2 \iff$

$\|(\alpha-x_m)-(\alpha-x_n)\|^2 = 2\cdot\|\alpha-x_n\|^2 + 2\|\alpha-x_m\|^2 - \|(\alpha-x_n)+(\alpha-x_m)\|^2 \iff$

$\|x_n - x_m\|^2 = 2\|\alpha-x_n\|^2 + 2\|\alpha-x_m\|^2 - \|2\alpha-(x_n+x_m)\|^2 \iff$

$\|x_n-x_m\|^2 = 2\|\alpha-x_n\|^2 + 2\|\alpha-x_m\|^2 - 4\|\alpha - \frac{x_1+x_2}{2}\|^2$ Επειδή K κυρτό $\Rightarrow \frac{x_1+x_2}{2} \in K \Rightarrow$

$\|\alpha - \frac{x_1+x_2}{2}\|^2 \geq d^2(\alpha,K)$

Άρα $\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\|\alpha-x_n\|^2 + 2\|\alpha-x_m\|^2 - 4d^2(\alpha,K) \xrightarrow{n,m\to\infty} 2\cdot d^2(\alpha,K) + 2d^2(\alpha,K) - 4d^2(\alpha,K) = 0$

Άρα (x_n) είναι Cauchy. Έστω $x = \lim x_n$ (Υπάρχει γιατί $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert $\Rightarrow$ $\mathcal{H}$ πλήρης)

Τότε $x \in K$ (K κλειστό) και $\|\alpha - x\| = \lim\limits_{n\to\infty}\|\alpha - x_n\| = d(\alpha,K)$

(ii) Μοναδικότητα

Έστω ότι υπάρχουν 2 τέτοια σημεία. Τα x, x'. Εφαρμόζουμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου στα $\alpha - x$, $\alpha - x'$. Ύστερα από πράξεις παίρνουμε:

$\|x-x'\|^2 = 2\cdot\|\alpha-x\|^2 + 2\|\alpha-x'\| - 4\|\alpha - \frac{x+x'}{2}\|^2$ (*)

Από κυρτότητα $K \Rightarrow \frac{x+x'}{2} \in K \Rightarrow \|\alpha - \frac{x+x'}{2}\|^2 \geq d^2(\alpha,K)$ και από υπόθεση

$\|\alpha - x\|^2 = \|\alpha - x'\|^2 = d^2(\alpha,K)$

Άρα η (*) $\Rightarrow \|x-x'\|^2 \leq 2\cdot d^2(\alpha,K) + 2\cdot d^2(\alpha,K) - 4d^2(\alpha,K) = 0 \Rightarrow$

$\|x-x'\|^2 = 0 \Rightarrow x = x'$

Μάθημα 3ο ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 13/02/2018

Πρόταση: Έστω $K \subseteq \mathcal{H}$ κλειστός υπόχωρος και $\alpha \in \mathcal{H}$. Για το πλησιέστερο στο α σημείο $x \in K$ ισχύει $\langle \alpha - x, y \rangle = 0 \quad \forall y \in K$.

Απόδειξη:

Έστω $y \in K$ χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $\|y\| = 1$. Έστω $\lambda = \langle \alpha - x, y \rangle$.
Τότε $x + \lambda y \in K$ και έστω $d = d(\alpha, K) = \|\alpha - x\|$. Τότε $d^2 \leq \|\alpha - x - \lambda y\|^2 = \langle \alpha - x - \lambda y, \alpha - x - \lambda y \rangle =$
$= \langle \alpha - x, \alpha - x \rangle - 2\,\mathrm{Re}\langle \alpha - x, \lambda y \rangle + |\lambda|^2 \langle y, y \rangle = d^2 - 2\,\mathrm{Re}(\bar{\lambda} \cdot \lambda) + |\lambda|^2 = d^2 - 2|\lambda|^2 + |\lambda|^2 =$
$= d^2 - |\lambda|^2 \Rightarrow |\lambda| = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

Ορισμός: Έστω $M \subseteq H$, $M \neq \emptyset$ το σύνολο $M^{\perp} = \{ y \in H : \langle x, y \rangle = 0 \ \forall x \in M \}$ ονομάζεται ορθογώνιο συμπλήρωμα του M.

Πρόταση: Το $M^{\perp}$ είναι κλειστός υπόχωρος του H

Παρατήρηση: Σε χώρο H Hilbert αν $x_n \to x$, $y_n \to y$ τότε $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$

Πρόταση: Για κάθε κλειστό υπόχωρο M του H ισχύει $H = M \oplus M^{\perp}$, το οποίο σημαίνει ότι κάθε $x \in H$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο $x = y + z$ με $y \in M$ και $z \in M^{\perp}$.
Συχνά γράφουμε $x = y \oplus z$.

Απόδειξη

Έστω $x \in H$. Έστω x_1 το πλησιέστερο στο x σημείο του M. Η τελευταία πρόταση μας λέει ότι το $x - x_1 \in M^{\perp}$, άρα $x = x_1 + (x - x_1)$ όπου $x_1 \in M$ και $x_2 = x - x_1 \in M^{\perp}$
Μοναδικότητα: Έστω ότι υπάρχουν $x_1' \in M$ και $x_2' \in M^{\perp}$ ώστε $x = x_1' + x_2'$ τότε:
$x_1 + x_2 = x_1' + x_2' \Leftrightarrow M \ni (x_1 - x_1') = (x_2' - x_2) \in M^{\perp} \Leftrightarrow x_1 - x_1' = x_2' - x_2 = 0$, άρα $x_1 = x_1'$ και $x_2 = x_2'$.

Πρόταση: (Ιδιότητες ορθογώνιου συμπληρώματος)

(i) $M \subseteq N \Rightarrow N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$

(ii) $M \subseteq M^{\perp\perp}$

(iii) $M = M^{\perp\perp} \Leftrightarrow M$ κλειστός υπόχωρος

(iv) M πυκνό $\Rightarrow M^{\perp} = \{0\}$

(v) αν M υπόχωρος και $M^{\perp} = \{0\}$ τότε M πυκνό.

Απόδειξη:

(i), (ii) OK

(iii) ($\Longrightarrow$) άμεσο

($\Longleftarrow$) Έστω $x \in M^{\perp\perp}$. Γράφουμε $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^{\perp}$

$$\langle x, x_2 \rangle = \langle x_1 + x_2, x_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle \Longrightarrow \langle x_2, x_2 \rangle = 0 \Longrightarrow x = x_1 \in M$$

(iv) Έστω $x \in M^{\perp}$, υπάρχει τότε $(x_n) \subset M$ τέτοιο ώστε $x_n \to x$, τότε

$0 = \langle x_n, x \rangle \longrightarrow \langle x, x \rangle$ άρα $x = 0$

(v) Θα δείξω ότι $\overline{M} = \mathcal{H}$, έστω $x \in \mathcal{H}$. Γράφουμε $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \overline{M}$, $x_2 \in \overline{M}^{\perp}$

Όμως $\overline{M} \supset M \Longrightarrow \overline{M}^{\perp} \subset M^{\perp} = \{0\}$ Άρα $x_2 = 0$ $\Longrightarrow$ Άρα $x = x_1 \in \overline{M} \Longrightarrow$ Άρα M πυκνό.

Άσκηση: Να δειχθεί ότι το σύνολο $M = \{(x_1, 2x_1, x_1, 0, x_5, 0, x_7, 0, \dots) \in \ell^2\}$ είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ^2. Να βρεθεί ο $M^{\perp}$. Να γραφεί το τυχόν $x \in \ell^2$ ως $x = y + z$, $y \in M$, $z \in M^{\perp}$

Παράδειγμα: Στον $L^2(-1,1)$ θεωρούμε τους υποχώρους:

$L^2_{\alpha} = \{ f \in L^2(-1,1) : f(t) = f(-t), \text{ σχεδόν παντού} \}$

$L^2_{\pi} = \{ f \in L^2(-1,1) : f(-t) = -f(t), \text{ σχεδόν παντού} \}$

Αποδεικνύεται το εξής: Αν $f_n \longrightarrow f$ στον $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, ανοιχτό $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει υπακολουθία $(f_{n_k})_k$ τέτοια ώστε $f_{n_k}(x) \to f(x)$ σχεδόν παντού.

Από αυτό έπεται ότι οι L^2_{α}, L^2_{π} είναι κλειστοί υπόχωροι του $L^2(-1,1)$. Θα δείξω ότι:

$L^2(-1,1) = L^2_{\alpha} \oplus L^2_{\pi}$ (δηλαδή $L^2_{\alpha} = (L^2_{\pi})^{\perp}$ και $L^2_{\pi} = (L^2_{\alpha})^{\perp}$)

Έστω $g \in L^2_{\alpha}$, $h \in L^2_{\pi}$ τότε $\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} g(t)\overline{h(t)}\,dt = \int_{-1}^{0} g(t)\overline{h(t)}\,dt + \int_{0}^{1} g(t)\overline{h(t)}\,dt$

Θέτουμε $t = -s$ και έχω $= \int_0^1 g(-s)\overline{h(-s)}\,ds + \int_0^1 g(t)\overline{h(t)}\,dt = -\int_0^1 g(s)\overline{h(s)}\,ds + \int_0^1 g(t)\overline{h(t)}\,dt = 0$

Έστω $f \in L^2(-1,1)$ τότε: $f(t) = \underbrace{\frac{f(t)+f(-t)}{2}}_{\in L^2_{\alpha}} + \underbrace{\frac{f(t)-f(-t)}{2}}_{\in L^2_{\pi}}$

Άσκηση: Αν $M, N \subseteq \mathcal{H}$ κλειστοί υπόχωροι και $M \perp N$ και $\mathcal{H} = M + N$, τότε $N = M^{\perp}$, $M = N^{\perp}$

ΕΦΜ 6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 13/02/2018

Παράδειγμα: $L^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό. Θεωρούμε $E \subseteq \Omega$ και τον υπόχωρο
$M_E = \{f \in L^2(\Omega) : f(x) = 0 \ \forall x \in E^c\}$
Τότε ο M_E είναι κλειστός υπόχωρος του $L^2(\Omega)$ και $M_E^\perp = M_{E^c}$
Η ανάλυση της τυχαίας $f \in L^2(\Omega)$ ως προς την ανάλυση $L^2(\Omega) = M_E \oplus M_{E^c}$ είναι
$f = f\chi_E + f\chi_{E^c}$ $\left(\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$ χαρακτηριστική συνάρτηση $\right)$

Ορισμός: Έστω M κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ και $x \in \mathcal{H}$. Έστω $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$ τέτοια ώστε $x = x_1 + x_2$. Το x_1 ονομάζεται ορθογώνια προβολή του x στο M

Άσκηση: Ορίζουμε $P_M : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ $P_M x = x_1$ και ανάλογα $P_{M^\perp} x = x_2$. Να δειχθεί ότι
έστω $P = P_M$:
(i) $Px = x \iff x \in M$
(ii) $Px = 0 \iff x \in M^\perp$
(iii) $P^2 = P$

Ορθοκανονικές Βάσεις

Ορισμός: Ένα σύνολο $\{e_n\}$ λέγεται ορθοκανονικό αν $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & m \neq n \\ 1, & m = n \end{cases}$

Πρόταση: (Ανισότητα Besel) Έστω $\{e_n\}$ ορθοκανονικό σύνολο, τότε $\forall x \ \mathcal{H}$
$\sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2$
Τα $\langle x, e_n \rangle$ ονομάζονται συντελεστές Fourier του $x \in \mathcal{H}$ ως προς το ορθοκανονικό σύνολο $\{e_n\}$
Απόδειξη:
Έστω $M \in \mathbb{N}$ τότε $0 \leq \langle x - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle \cdot e_n , x - \sum_{k=1}^{M} \langle x, e_k \rangle e_k \rangle =$
$= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{M} \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle x, e_k \rangle - \sum_{n=1}^{M} \langle x, e_n \rangle \langle e_n, x \rangle + \sum_{n,k=1}^{M} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle x, e_k \rangle} \cdot \langle e_n, e_k \rangle =$

$= \|x\|^2 - 2 \sum_{k=1}^{M} |\langle x, e_k \rangle|^2 + \sum_{n=1}^{M} |\langle x, e_n \rangle|^2 \iff \|x\|^2 \geq \sum_{k=1}^{M} |\langle x, e_k \rangle|^2$
Μετά παίρνουμε $M \to \infty$

Μάθημα 4º ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 15/02/2018

$\{e_n\}$ ορθοκανονικό σύνολο

Λήμμα: Έστω $x \in \mathcal{H}$, τότε η σειρά $\sum_n \langle x, e_n \rangle \cdot e_n$ συγκλίνει και για το αθροισμά της y, ισχύει $\|y\| \le \|x\|$

Απόδειξη:

Έστω $y_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \cdot e_k$ Θα δείξω ότι η (y_n) είναι Cauchy

Έστω $m > n$ τότε $\|y_m - y_n\|^2 = \|\sum_{k=n+1}^{m} \langle x, e_k \rangle e_k\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |\langle x, e_k \rangle|^2 \le \sum_{k=n+1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

άρα (y_n) Cauchy $\Longrightarrow$ Άρα η σειρά συγκλίνει $\Longrightarrow$ άρα $y = \lim y_n$

Τότε $\|y\|^2 = \lim \|y_n\|^2 = \lim \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \le \|x\|^2$

Ορισμός: (i) Αν $A \subseteq \mathcal{H}$, $A \neq \emptyset$ συμβολίζουμε με $\text{lim}A$ τη γραμμική θήκη του A (ο μικρότερος υπόχωρος που περιέχει το A) και ισχύει:

$\text{lim}A = \{\lambda_1 \alpha_1 + \ldots + \lambda_n \alpha_n ;\ n \in \mathbb{N},\ \alpha_k \in A,\ \lambda_k \in \mathbb{C}\}$

(ii) $\overline{\text{lim}A}$ η κλειστή γραμμική θήκη (ο μικρότερος κλειστός υπόχωρος)

Λήμμα: Έστω $\{e_n\}$ ορθοκανονικό σύνολο και $L = \overline{\text{lim}\{e_n\}}$, τότε $y \in L$ για το οποίο ως προς την ανάλυση $\mathcal{H} = L \oplus L^{\perp}$ έχουμε $x = y \oplus (x-y)$ είναι το $y = \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k$

Απόδειξη:

Αρκεί να δείξουμε ότι $y - x \in L^{\perp}$

$\langle y-x, e_n \rangle = \langle \sum_k \langle x, e_k \rangle e_k - x, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \langle x, e_n \rangle = 0$

Πρόταση: Έστω $\{e_n\}$ ορθοκανονικό σύνολο τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(1) $x = \sum_n \langle x, e_n \rangle \cdot e_n \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

(2) $\|x\|^2 = \sum_n |\langle x, e_n \rangle|^2 \quad \forall x \in \mathcal{H}$

(3) αν $\langle x, e_n \rangle = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ τότε $x = 0$

(4) $\overline{\text{lim}\{e_n\}} = \mathcal{H}$

Απόδειξη:

(1) $\Rightarrow$ (2) Συνέπεια προηγούμενου λήμματος

(2) $\Rightarrow$ (3) Άμεσο

(3) $\Rightarrow$ (4) Έστω ότι $\overline{\text{lim}\{e_n\}} \subsetneq \mathcal{H}$, και έστω $x \in \mathcal{H} \setminus \overline{\text{lim}\{e_n\}}$. Θέτουμε $z = \sum_n \langle x, e_n \rangle \cdot e_n \in \overline{\text{lim}\{e_n\}}$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $<z-x, e_n> = <\sum_k <x,e_k> e_k - x, e_n> = 0$

Άρα $z-x=0 \Rightarrow z=x$. Άτοπο αφού $x \notin \overline{\lim\{e_n\}}$ ενώ $z \in \overline{\lim\{e_n\}}$

(4)⇒(1) Έστω $y = \sum_n <x,e_n> e_n$, όπως πριν $<x-y, e_n> = 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

άρα $x-y \in \{e_n\}^{\perp} \Rightarrow x-y \in \overline{\lim\{e_n\}}^{\perp} = \mathcal{H}^{\perp} = \{0\} \Rightarrow x=y$

Ορισμός: Ένα ορθοκανονικό σύνολο $\{e_n\}$ για το οποίο ισχύουν οι (1)-(4) της πρότασης, λέγεται πλήρες ορθοκανονικό σύνολο ή ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$.

Έχουμε δει το εξής: αν L κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ και $\{e_n\}$ ορθοκανονική βάση του L, τότε η ορθογώνια προβολή $P_L x$ του x στον L δίνεται από τη σχέση $P_L x = \sum_n <x, e_n> e_n$

Θεώρημα: Κάθε διαχωρίσιμος χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ έχει μια αριθμήσιμη ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$

Παραδείγματα

(1) Στον ℓ^2 το σύνολο $\{e_1, e_2, \dots\}$ όπου $e_n = (0, \dots, 0, \overset{n\text{-θέση}}{1}, 0, \dots)$ είναι μια ορθοκανονική βάση.

(2) Στον $L^2(0,2\pi)$ το σύνολο όλων των $e_n, n \in \mathbb{Z}$ όπου $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}$, $x \in (0,2\pi)$ είναι ορθοκανονική βάση του $L^2(0,2\pi)$

$\{e_n\}$ ορθοκανονικό σύνολο : εύκολο

$\{e_n\}$ πλήρες : δύσκολο.

Ορισμός: Δύο χώροι Hilbert $\mathcal{H}, \mathcal{F}$ λέγονται ισόμορφοι αν υπάρχει απεικόνιση $U: \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ τέτοια ώστε:

(i) U 1-1 και επί

(ii) U γραμμική

(iii) $<Ux, Uy>_{\mathcal{F}} = <x, y>_{\mathcal{H}}$

Παρατήρηση: Δύο οποιοιδήποτε διαχωρίσιμοι χώροι Hilbert είναι ισόμορφοι μεταξύ τους

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 15/02/2018

Θα δείξουμε ότι ο τυχόν διαχωρίσιμος $\mathcal{H}$ είναι ισόμορφος με τον ℓ^2

Έστω $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$

$U: \mathcal{H} \to \ell^2 \qquad Ux = (\langle x, e_1\rangle, \langle x, e_2\rangle, \dots)$

$U^{-1}: \ell^2 \to \mathcal{H} \qquad U^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = \sum_n \alpha_n \cdot e_n$

2. Τελεστές σε χώρους Hilbert

Ορισμός: Έστω $\mathcal{H}, \mathcal{F}$ δύο χώροι Hilbert. Ονομάζουμε γραμμικό τελεστή από τον $\mathcal{H}$ στον $\mathcal{F}$ κάθε γραμμική απεικόνιση $T: \mathcal{H} \to \mathcal{F}$

Ορισμός: Ορίζουμε $Ker(T) = \{x \in \mathcal{H} : Tx = 0\}$ (πυρήνας) (υπόχωρος του $\mathcal{H}$)

$Ran(T) = \{Tx : x \in \mathcal{H}\}$ (εικόνα) (υπόχωρος του $\mathcal{F}$)

Πρόταση: Έστω $T: \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ ένας τελεστής. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) T Lipschitz συνεχής

(ii) T συνεχής στο 0

(iii) $\exists M \geq 0$ τέτοιο ώστε $\|Tx\| < M\|x\| \; \forall x \in \mathcal{H}$

Απόδειξη:

(i) ⟹ (ii) Προφανής

(ii) ⟹ (iii) Ισχύει $T0 = 0$. Άρα αφού T συνεχής στο 0 $\exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\|x - 0\| = \|x\| < \delta$ τότε $\|Tx - T0\| = \|Tx\| < 1$ (παίρα για $\varepsilon = 1$) $\Rightarrow \|Tx\| < 1$

άρα για κάθε $x \in \mathcal{H}, x \neq 0$, αν πάρουμε $\|Tx\| = \frac{2 \cdot \|x\|}{\delta} \left\|T\left(\frac{\delta}{2} \frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$

(iii) ⟹ (i) Έστω $x, y \in \mathcal{H}$ τότε $\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq M\|x - y\|$

Στο εξής θα λέμε συνήθως φραγμένος αντί συνεχής (για τους τελεστές)

Ορισμός: Ο $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ ορίζεται ως ο χώρος όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T: \mathcal{H} \to \mathcal{F}$

Ο $\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ γίνεται κατά φυσικό τρόπο γραμμικός χώρος.

Ορισμός: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$, ορίζουμε $\|T\| = \inf\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\| \ \forall x \in \mathcal{H}\}$

Παρατήρηση: Ισχύει ότι $\|T\| = \inf\{M \geq 0, \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq M \ \forall x \in \mathcal{H}, x \neq 0\}$
$= \inf\{M \geq 0 : \|Ty\| \leq M \ \forall y$ με $\|y\| = 1\} = \min\{M \geq 0 : \|Ty\| \leq M \ \forall y \in \|y\| = 1\}$

Πρόταση: Ισχύουν τα εξής:
$\|T\| = \sup\{\|Ty\|, \|y\| = 1\} = \sup\{\|Ty\|, \|y\| \leq 1\} = \sup\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}, x \neq 0\}$
$= \min\{M \geq 0 : \frac{\|Tx\|}{\|x\|} < M \ \forall x \neq 0\}$

Ισχύουν τα εξής
(i) $\|Tx\| \leq \|T\| \cdot \|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$
(ii) Αν $\|Tx\| \leq M \cdot \|x\| \ \forall x \in \mathcal{H}$ τότε $\|T\| \leq M$

Μάθημα 5ο   ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση   20/2/2018

Πρόταση: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό και $h: \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής και φραγμένη.
Έστω $T: L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ ο τελεστής $(Tu)(x) = h(x) \cdot u(x)$, $u \in L^2(\Omega)$, τότε ο T φραγμένος και $\|T\| = \sup_{x\in\Omega} |h(x)|$

Ένας τελεστής σαν αυτόν, λέγεται πολλαπλασιαστικός τελεστής $Tu = hu$

Απόδειξη:

Έστω $M = \sup_{x\in\Omega}|h(x)|$. Έστω $u \in L^2(\Omega)$ τότε

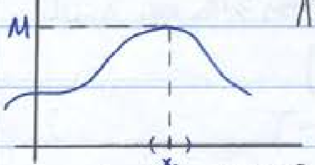
$$\|Tu\|^2 = \int_\Omega |Tu(x)|^2 dx = \int_\Omega |h(x)\, u(x)|^2 dx \le M^2 \int_\Omega |u(x)|^2 dx = M^2 \|u\|^2$$

Άρα T φραγμένος και $\|T\| \le M$

(δείχνουμε πρώτα ότι $\|T\| \le \sup|h(x)|$ γιατί μας δίνει ταυτόχρονα ότι $Tu \in L^2(\Omega)$)

(Σημείωση: για να δείξουμε την ισότητα ο τρόπος διαφέρει λέω ότι $\exists\, v \neq 0 \in \mathcal{H} : \|Tv\| = M\|v\|$, όμως μπορεί να μην υπάρχει και τότε κοιτάμε να πάμε είτε με ακολουθίες είτε με ε: $\frac{\|Tv\|}{\|v\|} > M - \varepsilon$)

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει τότε $x_0 \in \Omega$ τέτοιο ώστε $|h(x_0)| > M > \varepsilon$



Λόγω συνέχειας υπάρχει μια μπάλα $B(x_0, \delta)$ τέτοια ώστε
$|h(x)| > M - 2\varepsilon \quad \forall x \in B(x_0, \delta)$

Έστω $v = \chi_{B(x_0,\delta)}$ ← χαρακτηριστική συνάρτηση τότε $v \in L^2(\Omega)$

τότε $$\|T\|^2 \geq \frac{\|Tv\|^2}{\|v\|^2} = \frac{\int_\Omega |h(x)|^2 |v(x)|^2 dx}{\int_\Omega |v(x)|^2 dx} = \frac{\int_{B(x_0,\delta)} |h(x)|^2 dx}{\int_{B(x_0,\delta)} dx} \geq \frac{(M-2\varepsilon)^2 \int_{B(x_0,\delta)} dx}{\int_{B(x_0,\delta)} dx} = (M - 2\cdot\varepsilon)^2$$

Άρα $\|T\| \geq M - 2\varepsilon$, άρα (αφού ε τυχόν) $\|T\| \geq M$

Πρόταση: Έστω $(a_n) \in \ell^\infty$ (δηλαδή φραγμένη ακολουθία μιγαδικών). Έστω $A: \ell^2 \to \ell^2$ τέτοια ώστε $A(x_1, x_2, \ldots) = (a_1 x_1, a_2 x_2, \ldots)$ τότε ο A είναι φραγμένος και $\|A\| = \|a\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$

Απόδειξη:

(Άσκηση)

Άσκηση: (1) Βρείτε τον ορισμό του πότε η $h: \Omega \to \mathbb{C}$ είναι ουσιωδώς φραγμένη (essentially bounded) και τι είναι το ουσιώδες supremum, μιας τέτοιας συνάρτησης (essential supremum)

Συμβολισμός: $\|h\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_\Omega |h|$

(2) Γενικεύστε την προηγούμενη πρόταση για $h: \Omega \to \mathbb{C}$ ουσιωδώς φραγμένη (όχι απαραίτητα συνεχή)

Θεώρημα: (i) Η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον χώρο $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$ και ο $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$ με τη νόρμα αυτή είναι χώρος Banach (πλήρης)

(ii) Αν $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$ και $B\in\mathcal{B}(\mathcal{F},\mathcal{K})$ τότε $\|BA\|\le\|B\|\cdot\|A\|$

Απόδειξη:

(i) (1) $\|T\|\geq 0$ και $\|T\|=0\iff T=0$

(2) $\|\lambda T\|=|\lambda|\cdot\|T\|$, $\lambda\in\mathbb{C}$

(3) Έστω $T,S\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$ Έστω $x\in\mathcal{H}$ τότε:

$\|(T+S)x\|=\|Tx+Sx\|\le\|Tx\|+\|Sx\|<\|T\|\cdot\|x\|+\|S\|\,\|x\|=(\|T\|+\|S\|)\,\|x\|\Rightarrow\|T+S\|\le\|T\|+\|S\|$

άρα είναι νόρμα.

Πληρότητα: Έστω (T_n) ακολουθία Cauchy στον $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$. Έστω $x\in\mathcal{H}$, τότε:

$\|T_nx-T_mx\|\le\|T_n-T_m\|\,\|x\|$ άρα η (T_nx) είναι Cauchy στον $\mathcal{F}$.

Έστω $y=\lim T_nx$ Ορίζουμε $Tx=y=\lim T_nx$ Άρα $T:\mathcal{H}\to\mathcal{F}$. T γραμμικός (άσκηση)

Αφού η (T_n) είναι Cauchy είναι και φραγμένη, δηλαδή $\exists\, M>0$ τέτοιο ώστε $\|T_n\|\le M\ \forall n\in\mathbb{N}$

Άρα $\forall x\in\mathcal{H}$ $\|Tx\|=\lim\|T_nx\|\le M\|x\|$ άρα T φραγμένος

Έστω $\varepsilon>0$, $\exists\, n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n,m\geq n_0\Rightarrow\|T_n-T_m\|<\varepsilon$ Άρα για $n,m\geq n_0$ και $x\in\mathcal{H}$

$\|T_nx-T_mx\|\le\|T_n-T_m\|\,\|x\|\le\varepsilon\,\|x\|$ (Παίρνουμε όριο καθώς $m\to\infty$)

$\|T_nx-Tx\|\le\varepsilon\|x\|\ \forall n\geq n_0$. Άρα $\|T_n-T\|\le\varepsilon\ \forall n\geq n_0\Rightarrow T_n\to T$

(ii) Έστω $A\in\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$, $B\in\mathcal{B}(\mathcal{F},\mathcal{K})$ Έστω $x\in\mathcal{H}$, τότε:

$\|B\cdot Ax\|\le\|B\|\cdot\|Ax\|\le\|B\|\,\|A\|\,\|x\|\Rightarrow\|BA\|\le\|B\|\cdot\|A\|$

Ο Συζυγής Τελεστής.

Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz

Έστω $\Pi:\mathcal{H}\to\mathbb{C}$ γραμμικός και φραγμένος τελεστής. (= φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό (functional))

Τότε υπάρχει μοναδικό $y\in\mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $\Pi(x)=\langle x,y\rangle\ \forall x\in\mathcal{H}$, επιπλέον $\|\Pi\|=\|y\|$

Απόδειξη.

- Αν $\Pi=0$, τότε παίρνουμε $y=0$
- Αν $\Pi\neq 0$, τότε ο $Ker(\Pi)$ είναι γνήσιος κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$. Άρα υπάρχει στοιχείο $z\in Ker(\Pi)^{\perp}$, $z\neq 0$.

Έστω τώρα $x\in\mathcal{H}$, τότε $\Pi(\Pi(z)x-\Pi(x)z)=\Pi(z)\,\Pi(x)-\Pi(x)\cdot\Pi(z)=0$

δηλαδή $\Pi(z)x-\Pi(x)z\in Ker(\Pi)$

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 20/2/2018

Άρα $<\Pi(z)x-\Pi(x)z, z> = 0 \ \forall x \in \mathcal{H} \Rightarrow \Pi(z)<x,z> - \Pi(x)\cdot\|z\|^2 = 0 \Rightarrow$
$\Pi(x) = \frac{\Pi(z)}{\|z\|^2}<x,z> = <x, \frac{\overline{\Pi(z)}}{\|z\|^2} z> \ \forall x \in \mathcal{H}$ Παίρνω $y = \frac{\overline{\Pi(z)}}{\|z\|^2}$

Έστω $x \in \mathcal{H}$, τότε $|\Pi(x)| = |<x,y>| \leq \|y\| \, \|x\|$ και άρα $\|\Pi\| \leq \|y\|$
Για $x=y$ $\quad |\Pi(y)| = |<y,y>| = \|y\|^2$ άρα $\|\Pi\| = \sup \frac{|\Pi(x)|}{\|x\|} \geq \frac{|\Pi(y)|}{\|y\|} = \|y\|$
Μοναδικότητα:
Έστω ότι υπάρχουν $y_1, y_2 \in \mathcal{H}$ τέτοια ώστε:
$\Pi(x) = <x,y_1> = <x,y_2> \quad \forall x \in \mathcal{H}$, τότε $<x, y_1 - y_2> = 0 \ \forall x \in \mathcal{H} \Rightarrow y_1 - y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = y_2$

Ορισμός: ο T^* ονομάζεται συζυγής του T

Θεώρημα: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ υπάρχει μοναδικός τελεστής $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{F}, \mathcal{H})$ τέτοιος ώστε:
$<Tx, y> = <x, T^*y> \quad \forall x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{F}$
Απόδειξη:
Έστω $y \in F$ ορίζουμε $\Pi_y : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C} : \Pi_y(x) = <Tx, y>$
Το Π_y είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό. Άρα από το Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz $\exists \ z \in \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $\Pi_y(x) = <x, z> \ \forall x \in \mathcal{H}$ δηλαδή $<Tx, y> = <x, z>$ $\forall x \in \mathcal{H}$
Ορίζουμε $T^*_y = z$ (Άρα $T^* : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{H}$) Ο T^* είναι γραμμικός
Επίσης $\|T^*_y\| = \|z\| = \|\Pi_y\| = \sup_{x \in \mathcal{H}} \frac{\|\Pi_y(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathcal{H}} \frac{\|<Tx, y>\|}{\|x\|} \underset{C.S}{\leq} \sup_{x \in \mathcal{H}} \frac{\|T\| \|x\| \|y\|}{\|x\|} = \|T\| \cdot \|y\|$

και άρα T^* φραγμένο και μάλιστα $\|T^*\| \leq \|T\|$

Μάθημα 6º ΕΦΜ6 Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 22/2/2018

① Να δειχθεί ότι η νόρμα $\|f\|_\infty = \max\{|f(t)| : 0 \le t \le 1\}$ στον $C([0,1])$ δεν προέρχεται από κάποιο εσωτερικό γινόμενο.

Αρκεί να δειχθεί ότι δεν ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου:

$\|f+g\|_\infty^2 + \|f-g\|_\infty^2 = 2(\|f\|_\infty^2 + \|g\|_\infty^2)$

Παίρνω $f(t)=1$, $g(t)=t$, $f,g \in C([0,1])$ τότε έχω $2^2+1^2 \neq 2(1^2+1^2)$

② Έστω M και N κλειστοί υπόχωροι του $\mathcal{H}$. Να δειχθεί ότι:

(i) $(M+N)^\perp = M^\perp \cap N^\perp$

(ii) $(M\cap N)^\perp = \overline{M^\perp + N^\perp}$

(i) $(\subseteq)$ $M \subseteq M+N \Longrightarrow M^\perp \supseteq (M+N)^\perp$ και $N \subseteq M+N \Longrightarrow N^\perp \supseteq (M+N)^\perp$ $\Big\} \Longrightarrow M^\perp \cap N^\perp \supseteq (M+N)^\perp$

$(\supseteq)$ Έστω $x \in M^\perp \cap N^\perp$, έστω $y \in M+N \Longrightarrow y = \alpha + \beta$, $\alpha \in M$ και $\beta \in N$ τότε

$\langle x,y\rangle = \underbrace{\langle x,\alpha\rangle}_{0} + \underbrace{\langle x,\beta\rangle}_{0} = 0$. Άρα $x \in (M+N)^\perp$

(ii) Από το (i) $(M^\perp + N^\perp)^\perp = M^{\perp\perp} \cap N^{\perp\perp} = M \cap N$. Γνωρίζω ότι αν $E \subseteq \mathcal{H}$ υπόχωρος $\Rightarrow E^{\perp\perp} = \overline{E}$

άρα $(M\cap N)^\perp = (M^\perp + N^\perp)^{\perp\perp} = \overline{M^\perp + N^\perp}$

④ Έστω M ο κλειστός υπόχωρος του ℓ^2 που αποτελείται από ακολουθίες της μορφής $x = (x_1, 2x_1, x_1, 0, x_5, 0, x_7, \dots)$

(i) Να βρεθεί η γενική μορφή των στοιχείων του $M^\perp$

(ii) Δοθέντος ενός $x \in \ell^2$ να βρεθούν τα $y \in M$ και $z \in M^\perp$ που είναι τέτοια ώστε $x = y + z$

(i) Έστω $z = (z_n) \in M^\perp$, τότε $\langle x, z\rangle = 0$ $\forall x \in M \Leftrightarrow x_1\overline{z}_1 + x_2\overline{z}_2 + \dots = 0$ $\forall x = (x_n) \in M$

Δηλαδή $x_1\overline{z}_1 + 2x_1\overline{z}_2 + x_1\overline{z}_3 + x_5\overline{z}_5 + x_7\overline{z}_7 + \dots = 0$ $\forall x_1, x_5, x_7, \dots$

$\Longleftrightarrow \begin{cases} z_5 = z_7 = z_9 = \dots = 0 \\ \text{και} \\ z_1 + 2z_2 + z_3 = 0 \end{cases}$ Άρα η γενική μορφή είναι: $z = (z_1, z_2, -z_1 - 2z_2, z_4, 0, z_6, 0, \dots)$

(ii) Έστω $x = (x_n) \in \ell^2$. Έστω $x = y + z$, $y \in M$ και $z \in M^\perp$

Άρα $y = (y_1, 2y_1, y_1, 0, y_5, 0, y_7, \dots)$

$z = (z_1, z_2, -z_1 - 2z_2, z_4, 0, z_6, 0, \dots)$

Άρα καταλήγω να έχω το ακόλουθο σύστημα

$y_1 + z_1 = x_1$
$2y_1 + z_2 = x_2$ Πρακτικά έχω να λύσω μόνο τα 3 πρώτα με
$y_1 - z_1 - 2z_2 = x_3$ αγνώστους y_1, z_1, z_2
$z_4 = x_4$
$y_5 = x_5$
$\vdots$

Προκύπτει τελικά, $y = \left(\frac{x_1+2x_2+x_3}{6}, \frac{x_1+2x_2+x_3}{3}, \frac{x_1+2x_2+x_3}{6}, 0, x_5, \dots\right)$

$z = \left(\frac{5x_1-2x_2-x_3}{6}, \frac{-x_1+x_2-x_3}{3}, \frac{-x_1+2x_2-5x_3}{6}, x_4, 0, x_6, \dots\right)$

5 $(\mathcal{H}_n, \langle \cdot,\cdot \rangle_n)$ χώρος Hilbert, $x = (x_1, x_2, \dots)$ $x_k \in \mathcal{H}_k$, $\langle x,y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n \rangle_n$
$\langle x,x \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_n^2 < \infty$. Ορίζουμε $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}_n = \{(x_1, x_2, \dots) : x_k \in \mathcal{H}_k \text{ τ.ω. } \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|_k^2 < +\infty\}$
με εσωτερικό γινόμενο $\langle x,y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x_n, y_n \rangle_n$. Δείξτε ότι ο $\mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert
και ότι αν όλοι οι $\mathcal{H}_n$ είναι διαχωρίσιμοι τότε και ο $\mathcal{H}$ διαχωρίσιμος.

Τα δείχνω αντίστοιχα με όσα έκανα για τον ℓ^2

Πληρότητα:

(x_n) Cauchy στον $\mathcal{H}$.

$x_n = (x_{n1}, x_{n2}, \dots) : x_{nk} \in \mathcal{H}_k$ τότε $\forall j \in \mathbb{N}$

$\|x_{nj} - x_{mj}\|_j \leq \|x_n - x_m\|_{\mathcal{H}}$

Άρα (x_{nj}) Cauchy στον $\mathcal{H}_j$, άρα συγκλίνει

Έστω $y_j = \lim x_{nj}$ ορίζουμε $y = (y_1, y_2, \dots)$

Τότε η $y \in \mathcal{H}$ και $x_n \to y \in \mathcal{H}$

Διαχωρισιμότητα:

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε ένα αριθμήσιμο πυκνό υπόχωρο Q_n του $\mathcal{H}_n$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε:

$A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots 0) : x_k \in Q_k\}$

Τότε A_n αριθμήσιμο. Θέτουμε $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ (αριθμήσιμο και αυτό)

Δείχνω ότι A πυκνό.

ΕΦΜ 6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 22/2/2018

Πρόταση: (Ιδιότητες του συζυγούς)
Έστω $T, T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$, $S \in \mathcal{B}(\mathcal{F}, \mathcal{K})$ τότε:
(i) $(T_1 + T_2)^* = T_1^* + T_2^*$
(ii) $(\lambda \cdot T)^* = \bar{\lambda} T^*$
(iii) $T^{**} = T$
(iv) $(ST)^* = T^* S^*$
(v) $\|T^*\| = \|T\|$
(vi) $\|T^*T\| = \|T\|^2$
(vii) αν ο T είναι αντιστρέψιμος, τότε $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

Απόδειξη:
(vi) • $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2$
• Έστω $x \in \mathcal{H}$, τότε $\|T\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} \|Tx\|^2 = \sup\limits_{\|x\|=1} < Tx, Tx > = \sup\limits_{\|x\|=1} < T^*Tx, x > \leq \sup\limits_{\|x\|=1} \|T^*Tx\| \cdot \|x\| = \|T^*T\|$
(vii) $T^{-1} T = T T^{-1} = I \Rightarrow (T^{-1} T)^* = (T T^{-1})^* = I \Rightarrow T^* (T^{-1})^* = (T^{-1})^* T^* = I \Longrightarrow$
T^* αντιστρέψιμος και $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

Παράδειγμα: Έστω $A: L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$ $(Af)(t) = t\, f(1-t^3)$. Να βρεθούν οι A^*, A^*A καθώς και η $\|A\|$

Λύση
Έστω $f, g \in L^2(0,1)$ τότε $< Af, g > = \int_0^1 t \cdot f(1-t^3) \cdot \overline{g(t)}\, dt$ (Κάνω αλλαγή μεταβλητής $1-t^3 = s \Rightarrow t = (1-s)^{1/3} \Rightarrow dt = -\frac{1}{3}(1-s)^{-2/3} ds$)
$= \int_0^1 (1-s)^{1/3} \cdot \overline{g((1-s)^{1/3})}\, \frac{1}{3}(1-s)^{-2/3} ds = \int_0^1 f(s) \left[\overline{\frac{1}{3}(1-s)^{-1/3} g((1-s)^{1/3})}\right] ds$
Άρα $A^*g(s) = \frac{1}{3}(1-s)^{-1/3} \cdot g((1-s)^{1/3})$

Υπολογίζουμε τον A^*A. Έχουμε $(A^*Af)(s) = \frac{1}{3}(1-s)^{-1/3}(1-s)^{1/3} f(1-(1-s)^{1/3 \cdot 3}) = \frac{1}{3} f(s)$
$A^* \cdot A = \frac{1}{3} I$
Άρα $\|A^*A\| = \|\frac{1}{3} I\| = 1/3 \overset{(vi)}{\Longrightarrow} \|A\| = \|A^*A\|^{1/2} = 1/\sqrt{3}$

Κάναμε χρήση του εξής: $L^2(\mathbb{R})$, $(Af)(t) = f(t+1)$, $(Bf)(t) = f(2t)$
$(BAf)(t) = (Af)(2t) = f(2t+1)$

Μάθημα 7º ΕΦΜ6 Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 27/2/2018

Ειδικοί Τύποι Τελεστών

① Ορθογώνιες Προβολές

$M \subset \mathcal{H}$ κλειστός υπόχωρος. Η ορθογώνια προβολή P επί του M ορίζεται ως $Px = x_1$ όπου: $x = x_1 \oplus x_2$, $x_1 \in M$, $x_2 \in M^\perp$

(Γραμμικός Τελεστής, $\|P\| = 1$, εκτός αν $M = \{0\}$ οπότε $P = 0$)

Πρόταση: (i) Αν P είναι ορθογώνια προβολή επί του M τότε $P = P^2 = P^*$

(ii) Αντίστροφα αν $P \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι τέτοια ώστε $P = P^2 = P^*$ τότε $Ran(P)$ κλειστός υπόχωρος και P είναι η ορθογώνια προβολή επί του $Ran(P)$

② Μοναδιαίοι Τελεστές

Ορισμός: $U: \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ μοναδιαίος αν είναι 1-1 και επί και επιπλέον:

$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in \mathcal{H}$

Παρατήρηση: Ο U είναι μοναδιαίος αν και μόνο αν U αντιστρέψιμος και $U^{-1} = U^*$.

$\langle Ux, Uy \rangle = \langle U^*Ux, y \rangle$, ισχύει $\langle U^*Ux, y \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y \Rightarrow U^*U = I$

επίσης αντίστροφα, έστω $u \in \mathcal{F}$, $u = Ux \Rightarrow UU^*u = UU^*Ux = UIx = Ux = u$

③ Ισομετρίες

Ορισμός: Ένας τελεστής $U: \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ είναι ισομετρία αν $\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle \ \forall x, y \in \mathcal{H}$.

(ισοδύναμα $\|Ux\| = \|x\| \ \forall x \in \mathcal{H}$)

Δεν είναι απαραίτητα επί $\Rightarrow U^*U = I_{\mathcal{H}}$ αλλά όχι απαραίτητα $UU^* = I$

Παράδειγμα: Στον $L^2(0, +\infty)$ ο τελεστής

$$(Af)(t) = \begin{cases} f(t-1), & t > 1 \\ 0, & 0 < t < 1 \end{cases}$$

είναι ισομετρία (όχι μοναδιαίος)

④ Αυτοσυζυγείς Τελεστές

Ορισμός: Ο $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ λέγεται αυτοσυζυγής αν $T=T^*$ Άρα ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \ \forall x,y \in \mathcal{H}$

Πρόταση: (Ιδιότητες αυτοσυζυγών Τελεστών)

(1) T_1, T_2 αυτοσυζυγείς $\Rightarrow T_1+T_2$ αυτοσυζυγής

(2) T αυτοσυζυγής, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \cdot T$ αυτοσυζυγής

(3) Έστω T_1, T_2 αυτοσυζυγείς, τότε $T_1 \cdot T_2$ αυτοσυζυγής $\Leftrightarrow T_1T_2 = T_2T_1$

(4) (T_n) αυτοσυζυγείς $T_n \xrightarrow{\text{ασθενώς}} T \Rightarrow T$ αυτοσυζυγής.

(5) Αν T αυτοσυζυγής τότε $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathcal{H}$

Παρατήρηση: Έστω $(T_n), T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ Έχω 3 τρόπους σύγκλισης

(i) αν $\|T_n - T\| \to 0$ σύγκλιση ως προς τη νόρμα

(ii) $T_n x \to Tx \ \forall x \in \mathcal{H}$, ισχυρή σύγκλιση

(iii) $\langle T_n x, y\rangle \to \langle Tx, y\rangle \ \forall x \in \mathcal{H}, y \in \mathcal{F}$, ασθενής σύγκλιση

Παράδειγμα: Στον $L^2(\Omega)$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$ έστω ο πολλαπλασιαστικός τελεστής
$(Tf)(x) = h(x) f(x)$ $(h \in L^\infty(\Omega))$ Τότε για $f, g \in L^2(\Omega)$
$\langle Tf, g\rangle = \int_\Omega h(x) f(x) \overline{g(x)}\, dx = \int_\Omega f(x) \overline{\overline{h(x)} g(x)}$ Άρα $(T^*g)(x) = \overline{h(x)}\, g(x)$
Άρα ο T αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $h(x) \in \mathbb{R}$ σχεδόν παντού.

Πρόταση: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ο T είναι αυτοσυζυγής αν και μόνο αν $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathcal{H}$.

Απόδειξη:

Για κάθε $x, y \in \mathcal{H}$ ισχύει ότι:

$\langle Tx, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle + i\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\langle T(x-iy), x-iy\rangle\right]$ και

$\langle x, Ty\rangle = \frac{1}{4}\left[\langle x+y, T(x+y)\rangle - \langle x-y, T(x-y)\rangle + i\langle x+iy, T(x+iy)\rangle - i\langle x-iy, T(x-iy)\rangle\right]$

Άρα $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle \ \forall x, y \in \mathcal{H}$. Άρα T αυτοσυζυγής

Παρατήρηση: Είναι σημαντικό ότι ο $\mathcal{H}$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{C}$
Στον $\mathbb{R}^2$, έστω $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ τότε $\langle Ax, x\rangle = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^2$ όμως $A^* = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \neq A$

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 27/2/2018

Πρόταση: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ αυτοσυζυγής, τότε:
(i) Οι ιδιοτιμές του T είναι όλες πραγματικές
(ii) Ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι κάθετα μεταξύ τους.
Απόδειξη:
(i) Έστω $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή του T. δηλαδή $\exists\, x \in \mathcal{H}, x \neq 0 : Tx = \lambda x$, τότε
$$\langle Tx, x\rangle = \lambda \langle x, x\rangle \implies \lambda = \frac{\langle Tx, x\rangle}{\|x\|^2} \in \mathbb{R}$$

(ii) Έστω $Tx = \lambda x$ $\quad x, y \in \mathcal{H}$ τότε
$Ty = \mu y$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$$\underbrace{\langle \lambda x, y\rangle}_{=\lambda\langle x,y\rangle} = \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \underbrace{\langle x, \mu y\rangle}_{=\mu\langle x,y\rangle}$$
Άρα $(\lambda-\mu)\langle x,y\rangle = 0 \implies \langle x,y\rangle = 0$

Φάσμα

Ορισμός: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, το επιλυτικό σύνολο (resolventset) $\rho(T)$ του T είναι το σύνολο $\{z \in \mathbb{C} : T - z := (T - zI)$ είναι 1-1, επί, με φραγμένο αντίστροφο$\}$.
Άρα αν $z \in \rho(T)$ η εξίσωση $Tx - z\cdot x = y$ (αγνωστος το x) έχει μοναδική λύση για κάθε $y \in \mathcal{H}$, η οποία εξαρτάται συνεχώς από το y. $x = (T-z)^{-1} y$

Ορισμός: Το σύνολο $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ ονομάζεται φάσμα του τελεστή T.

Παρατήρηση: Αν $\dim(\mathcal{H}) < \infty$, τότε το φάσμα του T συμπίπτει με το σύνολο των ιδιοτιμών του.

Λήμμα: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ με $\|T\| < 1$. ο $I - T$ είναι αντιστρέψιμος με φραγμένο αντίστροφο (δηλαδή $1 \notin \sigma(T)$) και μάλιστα $(1-T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n = I + T + T^2 + \ldots$
Απόδειξη:
Καταρχήν η σειρά συγκλίνει απόλυτα, αφού $\sum_{n=0}^{\infty} \|T^n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|T\|^n = \frac{1}{1-\|T\|}$
Έστω $A = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$ τότε θέλουμε να δούμε αν $A(I-T) = (I-T)A = I$.

$A(I-T)=(I+T+T^2+\dots)(I-T)=(I+T+T^2+\dots)-(T+T^2+T^3+\dots)=I$

και παρόμοια $(I-T)A=I$

Άρα $I-T$ αντιστρέψιμος και $(I-T)^{-1}=A$, $\|(I-T)^{-1}\|\leq \frac{1}{1-\|T\|}$

Πρόταση: Ισχύει $\sigma(T)\subseteq\{z:|z|\leq\|T\|\}$

Απόδειξη:

Έστω $z\in\mathbb{C}$ με $|z|>\|T\|$ θα δείξω ότι $z\in\rho(T)$

τότε $z\neq 0$ και $\|z^{-1}T\|<1$ Άρα από το λήμμα ο $z^{-1}T-I$ είναι αντιστρέψιμος.

άρα και ο $z-T=z(I-z^{-1}T)$ αντιστρέψιμος και

$(z-T)^{-1}=z^{-1}(I-zT)^{-1}=z^{-1}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(z^{-1}T)^n$

Άρα $z\in\rho(T)$ επίσης $\|(z-T)^{-1}\|=|z^{-1}|\,\|(I-z^{-1}T)^{-1}\|\leq\frac{1}{|z|(1-\|z^{-1}T\|)}=\frac{1}{|z|-\|T\|}$

Μάθημα 8ο ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 1/3/2018

Πρόταση: (i) Το $\sigma(T)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{C}$

(ii) Η απεικόνιση $\rho(T) \ni z \longrightarrow (T-z)^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αναλυτική (δηλαδή το $(T-z)^{-1}$ τοπικά αναπτύσσεται σε δυναμοσειρά: $\forall z_0 \in \rho(T)$ τότε $\exists r>0$: $(T-z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A_n (z-z_0)^n, A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$)

Απόδειξη:

(i) Θα δείξουμε ότι $\rho(T)$ ανοιχτό

Έστω λοιπόν $z_0 \in \rho(T)$. Έστω $z \in \mathbb{C}$ τότε $z - T = (z-z_0) + (z_0 - T) = (z_0 - T)\left[I - (z-z_0)(z_0-T)^{-1}\right]$

Άρα για να είναι ο $z-T$ αντιστρέψιμος, αρκεί (από λήμμα):

$\|(z-z_0)(z_0-T)^{-1}\| < 1$ δηλαδή $|z-z_0| < \frac{1}{\|(z_0-T)^{-1}\|}$

(ii) Έστω τώρα ότι $|z-z_0| < \frac{1}{\|(z_0-T)^{-1}\|}$ Τότε

$$(z-T)^{-1} = (z_0-T)^{-1}\left[I + (z-z_0)(z-T)^{-1}\right]^{-1} = (z_0-T)^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (z-z_0)^n (z_0-T)^{-n}$$

Πρόταση: Ισχύει $\sigma(T) \neq \emptyset$

Απόδειξη:

- Αν $T=0$, τότε $\sigma(T) = \{0\} \neq \emptyset$
- Έστω $T \neq 0$, ας υποθέσουμε $\sigma(T) = \emptyset$, τότε ο $(z-T)^{-1}$ ορίζεται $\forall z \in \mathbb{C}$

Έστω $x, y \in \mathcal{H}$. Έχουμε δει ότι αν $|z| > \|T\|$ η $\|(z-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{|z| - \|T\|}$

Ειδικότερα αν $|z| \geq 2\|T\|$ τότε $\|(z-T)^{-1}\| \leq \frac{1}{\|T\|}$

Ορίζουμε $f(z) = \langle (z-T)^{-1} x, y \rangle$ $z \in \mathbb{C}$. Η f είναι τότε ακέραια

(ακέραια := ορισμένη σε όλο το $\mathbb{C}$ και αναλυτική)

Για $|z| \geq 2\|T\|$ έχουμε

$|f(z)| = |\langle (z-T)^{-1} x, y \rangle| \leq \|(z-T)^{-1}\| \cdot \|x\| \, \|y\| \leq \frac{1}{\|T\|} \cdot \|x\| \, \|y\|$

Στο $\{z : |z| \leq 2\|T\|\}$ η f είναι φραγμένη ως συνεχής σε συμπαγές.

Άρα φραγμένη, άρα από Θεώρημα Liouville f σταθερή

Όμως για $|z| \geq \|T\|$, $|f(z)| \leq \frac{1}{|z| - \|T\|} \|x\| \cdot \|y\| \xrightarrow{z \to \infty} 0$

Άρα $f(z) = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$, δηλαδή $\langle (z-T)^{-1} x, y \rangle = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}, \forall x, y \in \mathcal{H}$. Άρα $(z-T)^{-1} = 0$ $\forall z \in \mathbb{C}$. Άτοπο

Θεώρημα: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Το $\sigma(T)$ είναι μη κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{C}$, που περιέχεται στο $\{z : |z| \leq \|T\|\}$. Επίσης η συνάρτηση $z \longrightarrow (z-T)^{-1}$ είναι αναλυτική συνάρτηση από το $\rho(T)$ στο $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Πρόταση: Ισχύει $\sigma(T^*) = \overline{\sigma(T)} = \{\bar{z} : z \in \sigma(T)\}$

Απόδειξη:

Ισχύει $w \in \rho(T^*) \Leftrightarrow w - T^*$ αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow (w - T^*)^*$ αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow (\bar{w} - T)$ αντιστρέψιμος $\Leftrightarrow \bar{w} \in \rho(T) \Leftrightarrow w \in \overline{\rho(T)}$

Άσκηση: Στον ℓ^2 έστω $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ (τελεστής δεξιάς μετατόπισης) να δειχθεί ότι: $\sigma(S) = \{z : |z| \le 1\}$

Λύση:

"$\subseteq$" Άμεσο

"$\supseteq$" ο S δεν έχει ιδιοτιμές. Αρκεί να δείξω ότι $\sigma(S^*) = \{z : |z| \le 1\}$

Βρίσκουμε τον S^*. Έστω $x, y \in \ell^2$, τότε:

$\langle Sx, y \rangle = \langle (0, x_1, x_2, \dots), (y_1, y_2, \dots) \rangle = x_1 \cdot \bar{y}_2 + x_2 \cdot \bar{y}_3 + \dots = \langle x, (y_2, y_3, \dots) \rangle$

άρα $S^*(y_1, y_2, y_3, \dots) = (y_2, y_3, \dots)$ $\leftarrow$ τελεστής αριστερής μετατόπισης

Αναζητώ ιδιοτιμές του S^*, έστω λ, $|\lambda| < 1$. Θέτουμε $S^* x = \lambda x$.

$$(x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ \end{cases}$$

επιλέγουμε $x_1 = 1$. Άρα τότε $x = (1, \lambda, \lambda^2, \dots)$, αφού $|\lambda| < 1$, $x \in \ell^2$

άρα λ ιδιοτιμή. Άρα $D(1) \subset \sigma(S^*) \Rightarrow \overline{D(1)} \subset \sigma(S^*)$. Έστω $z \in \overline{D(1)}$, τότε $\bar{z} \in D(1)$ άρα $\bar{z} \in \sigma(S^*) \Rightarrow z \in \sigma(S)$

Παράδειγμα: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ και $h : \Omega \to \mathbb{C}$ συνεχής και φραγμένη

Έστω T ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός τελεστής:

$(Tu)(x) = h(x)\, u(x)$. Τότε $\sigma(T) = \overline{Ran(h)}$

• Έστω $\lambda \in \sigma(T)$, και έστω αντίθετα $\lambda \notin \overline{Ran(h)}$, τότε υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $|\lambda - z| \geq \delta \ \forall z \in \overline{Ran(h)}$. Ειδικότερα $|\lambda - h(x)| \geq \delta \ \forall x \in \Omega$

Άρα ορίζεται η συνάρτηση $(\lambda - h(x))^{-1}$, $x \in \Omega$ και $|(\lambda - h(x))^{-1}| \le 1/\delta \ \forall x \in \Omega$

Έστω $(Su)(x) = (\lambda - h(x))^{-1} u(x)$ οπότε $\|S\| = \sup_{x \in \Omega} |(\lambda - h(x))^{-1}| \le 1/\delta$.

Παρατηρούμε ότι $S(\lambda - T) = (\lambda - T)S = I$

Άρα $(\lambda - T)$ αντιστρέψιμος και άρα $\lambda \in \rho(T)$ Άτοπο.

• Έστω $\lambda \in Ran(h)$. Ας υποθέσουμε ότι $\lambda \notin \sigma(T)$. Έστω $S = (\lambda - T)^{-1}$

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 1/3/2018

Έστω $\varepsilon>0$. Αφού h συνεχής υπάρχει $U \subseteq \underline{\Omega}$ με $|U| < +\infty$ τέτοιο ώστε
$|\lambda - h(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in U$. $\lambda \in \overline{Ran(h)} \Rightarrow \exists x_0 \in \underline{\Omega} \; |\lambda - h(x_0)| < \varepsilon/2$
Λόγω συνέχειας $\exists U$ τέτοιο ώστε $|h(x_0) - h(x)| < \varepsilon/2 \quad \forall x \in U$ $\Big\} \Rightarrow$
$|\lambda - h(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in U$

Έστω $\mathcal{X} = \mathcal{X}_U = \begin{cases} 1, & x \in U \\ 0, & x \in \underline{\Omega} \setminus U \end{cases}$ τότε $(\lambda - T) S \mathcal{X} = \mathcal{X} \Rightarrow$

$(\lambda - h(x))(S\mathcal{X})(x) = \mathcal{X}(x) = 1 \quad \forall x \in U \Rightarrow h(x) \neq \lambda \; \forall x \in U$ και $S\mathcal{X}(x) = \frac{1}{\lambda - h(x)} \; \forall x \in U$

Άρα $\|S\|^2 \geq \dfrac{\|S\mathcal{X}\|^2}{\|\mathcal{X}\|^2} = \dfrac{\int_{\underline{\Omega}} |S\mathcal{X}(x)|^2 dx}{\int_{\underline{\Omega}} \mathcal{X}(x)^2 dx} \geq \dfrac{\int_U \frac{1}{|\lambda - h(x)|^2} dx}{\int_U dx} \geq \dfrac{\int_U 1/\varepsilon^2 \, dx}{\int_U dx} = 1/\varepsilon^2$

Άρα $\|S\| \geq 1/\varepsilon \quad \forall \varepsilon$ Άτοπο.

Παρατήρηση: Αν $h \in L^\infty(\underline{\Omega})$ αντί $h \in L^\infty(\underline{\Omega}) \cap C(\underline{\Omega})$, τότε $\sigma(T) = EssRan(h)$
όπου $EssRan(h) = \{ z \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 : \mu(\{ x \in \underline{\Omega} : |h(x) - \lambda| < \varepsilon \}) > 0 \}$ (ουσιώδης εικόνα)

Άσκηση: Έστω $\alpha \in \ell^\infty$ και $A : \ell^2 \to \ell^2$: $A(x_1, x_2, \ldots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \ldots)$ τότε
(i) $\|A\| = \|\alpha\|_{\ell^\infty} = \sup_n |\alpha_n|$
(ii) $\sigma(A) = \overline{\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots\}}$ ← ιδιοτιμές $A \cdot e_k = \alpha_k \cdot e_k$

Μάθημα 9ο ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 6/3/2018

6) Έστω στον χώρο ℓ^2 ο τελεστής της δεξιάς μετατόπισης, $S(x_1,x_2,x_3,\dots)=(0,x_1,x_2,x_3,\dots)$

(i) Να βρεθούν οι S^*, S^*S και SS^*

(ii) Να δειχθεί ότι:

(α) $\|(S^*)^n\|=1$ για κάθε n και $(S^*)^n x \to 0$ για κάθε $x\in\ell^2$ και επίσης $\langle S^n x, y\rangle \to 0$ για κάθε $x,y\in\ell^2$.

Λύση:

(i) • Το S^* έχει γίνει. Είναι η αριστερή μετατόπιση

• $S^*Sx = S^*y = (y_2,y_3,\dots)$ Αν $y=Sx=(0,x_1,x_2,\dots)=(y_1,y_2,y_3,\dots)$

$\Rightarrow S^*Sx=(x_1,x_2,\dots)$

Άρα $S^*S=I$

• Επίσης $SS^*x = S(x_2,x_3,\dots)=(0,x_2,x_3,\dots)$

(ii)(α) Έχουμε $(S^*)^n(x_1,x_2,\dots)=(x_{n+1},x_{n+2},\dots)$

Ισχύει $\|(S^*)^n\|\le\|x\|\ \forall x\in\ell^2$, άρα $\|(S^*)^n\|\le 1$ όμως

$\|(S^*)^n e_{n+1}\|=\|e_{n+1}\|=1$ Άρα $\|(S^*)^n\|=1$

Έστω $x\in\ell^2$ τότε $\|(S^*)^n x\|^2=\sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|^2\to 0$ (ουρά συγκλίνουσας σειράς)

(β) $S^n(x_1,x_2,\dots)=(\underbrace{0,\dots,0}_{n-\text{θέσεις}},x_1,x_2,\dots)$ Προφανώς $\|S^n x\|=\|x\|\ \forall x\in\ell^2$

Έστω $x,y\in\ell^2$ τότε $|\langle S^n x,y\rangle| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k\cdot\overline{y}_{n+k}\right| \le \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_{n+k}|^2\right)^{1/2}$

$=\|x\|\left(\sum_{j=n+k}^{\infty}|y_j|^2\right)^{1/2}\longrightarrow 0$

Παρατήρηση: Έχουμε 3 τύπους σύγκλισης, Έστω (T_n), T

• $\|T_n-T\|\to 0$ σύγκλιση κατά νόρμα

• $\|T_n x - Tx\|\to 0\ \forall x$, ισχυρή σύγκλιση ($\Leftrightarrow T_n x\to Tx\ \forall x$)

• $\langle T_n x,y\rangle \to \langle Tx,y\rangle$ ασθενής σύγκλιση

Είναι άμεσο το εξής:

$|\langle T_n x,y\rangle-\langle Tx,y\rangle|\le\|T_n x-Tx\|\cdot\|y\|\le\|T_n-T\|\|x\|\cdot\|y\|$

Η άσκηση δείχνει ότι $(S^*)^n\to 0$ ισχυρά αλλά όχι κατά νόρμα (από το (α)) και (από το (β)) δείχνει ότι $S^n\to 0$ ασθενώς αλλά όχι ισχυρά.

(7) Έστω $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τελεστής για τον οποίο υπάρχει $c>0$ ώστε $\|Ax\| \geq c\|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$. Να αποδειχθεί ότι η εικόνα $Ran(A)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$.

Λύση.

Έστω $(y_n) \subset Ran(A)$: $y_n \to y$. Τότε υπάρχει (x_n) τέτοια ώστε $y_n = Ax_n$

Άρα $\|y_n - y_m\| = \|Ax_n - Ax_m\| \geq c\|x_n - x_m\|$

Αφού (y_n) Cauchy και η (x_n) είναι Cauchy. Έστω $x = \lim x_n$ τότε

$$\left.\begin{array}{l} Ax_n \to Ax \\ \| \\ y_n \to y \end{array}\right\} \text{ Άρα } y = Ax \in Ran(A) \quad \text{Άρα } Ran(A) \text{ κλειστό.}$$

(8) Να δειχθεί ότι ο τελεστής A στον $L^2(0,1)$, όπου $(Af)(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt$ είναι φραγμένος.

Λύση:

Έστω $f \in L^2(0,1)$ τότε $\|Af\| = \int_0^1 |Af(x)|\,dx = \int_0^1 \left| \int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt \right|^2 dx$

Μια λογική σκέψη είναι να πάρουμε Cauchy-Schwarz γιατί θέλουμε να εμφανίσουμε $\|f\|$

$\left|\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt\right|^2 \leq \left(\int_0^x |f(t)|^2 dt\right)\left(\int_0^x \frac{dt}{x-t}\,dt\right)$ όμως ο δεύτερος όρος είναι $+\infty$

Θα πάρω όμως το εξής

$$\left|\int_0^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}}\,dt\right|^2 = \left|\int_0^x \frac{f(t)}{(x-t)^{1/4}} \frac{1}{(x-t)^{1/4}}\,dt\right|^2 \leq \int_0^x \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{x-t}}\,dt \int_0^x (x-t)^{-1/2}\,dt$$

Έχουμε

$$\int_0^x (x-t)^{-1/2}\,dt = \left[-2(x-t)^{1/2}\right]_{t=0}^{t=x} = 2\sqrt{x}$$

$$\text{Άρα } \|Af\|^2 \leq 2\int_0^1 \sqrt{x} \int_0^x \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{x-t}}\,dt\,dx = 2\int_0^1\int_t^1 \sqrt{x} \frac{|f(t)|^2}{\sqrt{x-t}}\,dx\,dt$$

$$\leq 2\int_0^1 |f(t)|^2 \int_t^1 \frac{dx}{\sqrt{x-t}}\,dt \qquad (*) \int_t^1 (x-t)^{-1/2}\,dx = \left[2(x-t)^{1/2}\right]_{x=t}^{x=1} = 2\sqrt{1-t}$$

$$\overset{(*)}{=} 4\int_0^1 |f(t)|^2 \sqrt{1-t}\,dt \leq 4\int_0^1 |f(t)|^2 dt = 4\|f\|^2$$

Άρα ο A είναι φραγμένος. $\|A\| \leq 2$

(9) Έστω $y \in \mathcal{H}$ και το Π φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $\Pi(x) = \langle x, y \rangle$, $x \in \mathcal{H}$

Να βρεθούν οι τελεστές Π^*, $\Pi^*\Pi$ και $\Pi\Pi^*$

Λύση:

Έστω $x \in \mathcal{H}$ και $z \in \mathbb{C}$. Τότε $\langle \Pi(x), z \rangle_{\mathbb{C}} = \Pi(x)\bar{z} = \langle x, y\rangle \bar{z} = \langle x, z \cdot y \rangle$

ΕΦΜ 6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 6/3/2018

Άρα $\Pi^*(z) = zy$

Επίσης $(\Pi^*\Pi)(x) = \Pi^*(\langle x,y\rangle) = \langle x,y\rangle y$

και $\Pi\Pi^*(z) = \Pi(zy) = \langle zy, y\rangle = z\|y\|^2$

10 (α) Έστω M κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ και P η ορθογώνια προβολή επί του M. Να δειχθεί ότι $P = P^2 = P^*$

(β) Αντίστροφα να δειχθεί ότι αν $P \in B(\mathcal{H})$ είναι τέτοιος ώστε $P = P^2 = P^*$, τότε $Ran(P)$ είναι κλειστός υπόχωρος και ο P είναι η ορθογώνια προβολή επί του $Ran(P)$

Λύση:

(α) Έστω $x, y \in \mathcal{H}$ $\quad x = x_1 \oplus x_2 \quad x_1, y_1 \in M$

$y = y_1 \oplus y_2 \quad x_2, y_2 \in M^\perp$

Τότε $P^2x = P(Px) = Px_1 = x_1 = Px$ άρα $P^2 = P$

Επίσης $\langle Px, y\rangle = \langle x_1, y_1 \oplus y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \cancel{\langle x_1, y_2\rangle} = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle = \langle x, Py\rangle$

άρα $P = P^*$

(β) Έστω $(y_n) \subset M$ και $y_n \to y$, τότε $\exists\ (x_n) \subset \mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $y_n = Px_n$

Άρα $\underset{\swarrow\ Py}{Py_n} = P^2x_n = Px_n = y_n \longrightarrow y$

Άρα M κλειστός

Πάω να δείξω ότι P ορθογώνια προβολή στον M.

Κάθε $x \in \mathcal{H}$ γράφεται ως $x = Px + (x - Px)$, $Px \in M$

Άρα αρκεί να δείξω ότι $x - Px \in M^\perp\ \forall x \in \mathcal{H}$.

Έστω $y \in M$, $y = Pz$ τότε $\langle x - Px, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle Px, y\rangle$

$= \langle x, Pz\rangle - \langle Px, Pz\rangle = \langle x, Pz\rangle - \langle P^2x, Pz\rangle = \langle x, Pz\rangle - \langle x, P^2z\rangle$

$= \langle x, Pz\rangle - \langle x, Pz\rangle = 0$

11 Έστω $k(t,s)$ συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]\times[0,1]$. Να βρεθεί ο συζυγής K^* του τελεστή K στον $L^2(0,1)$ που ορίζεται από τη σχέση:

$(Ku)(t) = \int_0^1 k(t,s)u(s)\,ds$

Λύση:

Έστω $u, v \in L^2(\Omega)$ τότε $\langle Ku, v\rangle = \int_\Omega (Ku)(x)\overline{v(x)}\,dx = \int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u(y)dy\,\overline{v}(x)dx$

$= \int_\Omega\int_\Omega k(x,y)u(y)\overline{v}(x)\,dx\,dy = \int_\Omega u(y)\int_\Omega \overline{\overline{k(x,y)}\,v(x)}\,dx\,dy =$

$\overset{x \leftrightarrow y}{=} \int_0 u(x) \int_0 \overline{k(y,x)}\, v(y)\, dy\, dx$

Άρα $(K^* v)(x) = \int_0 \overline{k(y,x)}\, v(y)\, dy$

Δηλαδή ο K^* είναι και αυτός ολοκληρωτικός τελεστής με πυρήνα

$k^*(x,y) = \overline{k(y,x)}$

Μάθημα 10ο ΕΦΜ 6 Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 8/3/2018

Πρόταση: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$ τότε:

(i) $Ker(T^*) = Ran(T)^{\perp}$

(ii) $\overline{Ran(T^*)} = Ker(T)^{\perp}$

Απόδειξη:

(i) Έχουμε $x \in Ker(T^*) \Longleftrightarrow T^*x = 0 \Longleftrightarrow \langle T^*x, y\rangle = 0 \quad \forall y \in \mathcal{H}$.

$\Longleftrightarrow \langle x, Ty\rangle = 0 \quad \forall y \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \langle x, z\rangle = 0 \quad \forall z \in Ran(T) \Longleftrightarrow x \in Ran(T)^{\perp}$

(ii) Από το (i) έχουμε $Ker(T)^{\perp} = (Ran(T^*)^{\perp})^{\perp} = \overline{Ran(T^*)}$

Πρόταση: Αν ο $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ είναι αυτοσυζυγής, τότε $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$

Απόδειξη:

Έστω $z \in \sigma(T)$. Έστω ότι $z \notin \mathbb{R}$, $z = \alpha + ib$, $b \neq 0$ θα δείξουμε ότι $z - T$ αντιστρέψιμος

(i) ο $z-T$ είναι 1-1. Άμεση συνέπεια του ότι οι ιδιοτιμές του T είναι πραγματικές

(ii) $z-T$ είναι επί

(α) $Ran(z-T)$ κλειστός υπόχωρος

Έστω $x \in \mathcal{H}$ τότε $\|(z-T)x\|^2 = \|(\alpha-T)x + ibx\|^2$

$$= \|(\alpha-T)x\|^2 + \|bx\|^2 + 2\,\overset{=0}{Re\langle(\alpha-T)x, ibx\rangle} \geq |b|^2\|x\|^2$$

Άρα (άσκηση που έχουμε) $Ran(z-T)$ κλειστός υπόχωρος

(β) $Ran(z-T)$ πυκνός υπόχωρος

Έστω $y \in Ran(z-T)^{\perp}$, τότε $\langle y, (z-T)x\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H} \Rightarrow$

$\langle(\bar{z}-T)y, x\rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$

άρα $(\bar{z}-T)y = 0$, άρα $y = 0$ (αφού $\bar{z} \notin \mathbb{R}$)

Άρα $z-T$ επί

Η σχέση $\|(z-T)x\| \geq |b|\,\|x\|$ δίνει θέτοντας $x = (z-T)^{-1}y$

$\|(z-T)^{-1}y\| \leq \frac{1}{|b|}\|y\|$ άρα $(z-T)^{-1}$ φραγμένος

Συμπαγείς Τελεστές

Ορισμός: Ένας τελεστής $T \in B(\mathcal{H},\mathcal{F})$ λέγεται συμπαγής αν ισχύει το εξής:
Αν $(x_n) \subset \mathcal{H}$ φραγμένη, τότε η (Tx_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία

Συμβολισμός: $\mathcal{C}(\mathcal{H},\mathcal{F}) = \{T: \mathcal{H} \to \mathcal{F}, \ T \text{ συμπαγής}\}$

Πρόταση: ο $\mathcal{C}(\mathcal{H},\mathcal{F})$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$

Απόδειξη:
Έστω T_1, T_2 συμπαγείς. Έστω (x_n) φραγμένη, τότε η (T_1x_n) έχει φραγμένη υπακολουθία $(T_1x_{n_k})$.
Αφού η (x_{n_k}) φραγμένη, η $(T_2x_{n_k})$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(T_2x_{n_{k_\lambda}})$
τότε η $((T_1+T_2)x_{n_{k_\lambda}})$ είναι συγκλίνουσα.

Παραδείγματα:
(1) Αν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$ είναι πεπερασμένης τάξης (δηλαδή $\dim(Ran(T)) < +\infty$)
τότε είναι συμπαγής.
(Λόγω του ότι σε έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης: κλειστό και φραγμένο $\Rightarrow$ συμπαγές)

(2) Έστω P_M ορθογώνια προβολή στον κλειστό υπόχωρο M, όπου $\dim(M)=\infty$
τότε P όχι συμπαγής.
Έστω $\{e_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του M. Τότε
$\|Pe_n - Pe_m\|^2 = \|e_n - e_m\|^2 = 2$
Άρα (Pe_n) δεν μπορεί να έχει Cauchy υπακολουθία

Πρόταση: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$, $S \in \mathcal{B}(\mathcal{F},\mathcal{K})$. Αν ο T είναι συμπαγής ή ο S είναι συμπαγής, τότε ο ST είναι συμπαγής.

Απόδειξη:
Έστω T συμπαγής. Έστω $(x_n) \subset \mathcal{H}$ φραγμένη, τότε η (Tx_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (Tx_{n_k}). Αφού S φραγμένος η (STx_{n_k}) συγκλίνει.

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 8/3/2018

Έστω S συμπαγής. Έστω $(x_n) \subset H$ φραγμένη, τότε η (Tx_n) είναι φραγμένη. Άρα η (STx_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Πρόταση: ο $\mathcal{C}(H,F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{B}(H,F)$

Απόδειξη:

Έστω $(T_n) \subset \mathcal{C}(H,F)$, $T_n \longrightarrow T$. Θα δείξω ότι $T \in \mathcal{C}(H,F)$

Έστω $(x_n) \subset H$ φραγμένη, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\|x_n\| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Αφού T_1 συμπαγής η $(T_1 x_n)$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(T_1 x_{n_{1,k}})_k$

Αφού T_2 συμπαγής η $(T_2 x_{n_{1,k}})$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(T_2 x_{n_{2,k}})_k$

και ου το καθεξής.

Τελικά για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζεται η ακολουθία $(x_{n_{i,k}})_k$ ώστε

(i) $(x_{n_{i,k}})$ υπακολουθία της $(x_{n_{i-1},k})$

(ii) η $(T_i x_{n_{i,k}})$ συγκλίνει

Ορίζουμε $y_k = x_{k,k}$ τότε η $(T_i y_n)_n$ είναι συγκλίνουσα $\forall i \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, έστω $i \in \mathbb{N}$ σταθερό. Για $k > i$ έχουμε:

$(T_i y_k) = (T_i x_{k,k})$ το οποίο είναι για $k > i$ υπακολουθία της $(T_i x_{i,k})$ η οποία συγκλίνει.

Θα δείξω ότι η (Ty_n) είναι Cauchy.

Έστω $\varepsilon > 0$, έστω $i \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\|T_i - T\| < \varepsilon$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n, m > n_0 \Longrightarrow \|T_i y_n - T_i y_m\| < \varepsilon$. Για $n, m > n_0$ έχουμε τότε ότι

$$\|Ty_n - Ty_m\| \leq \|Ty_n - T_i y_n\| + \|T_i y_n - T_i y_m\| + \|T_i y_m - Ty_m\|$$
$$\leq \|T - T_i\| \|y_n\| + \varepsilon + \|T_i - T\| \|y_m\| < 3 \cdot \varepsilon$$

Άρα (Ty_n) Cauchy.

Παρατήρηση: Αν ένας τελεστής είναι όριο τελεστών πεπερασμένης τάξης τότε είναι συμπαγής

Άσκηση: Στον ℓ^2 έστω ο τελεστής $A(x_1, x_2, \dots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$, όπου $\alpha = (\alpha_n) \in \ell^\infty$. Να δειχθεί ότι A συμπαγής $\Longleftrightarrow \alpha_n \longrightarrow 0$

Πρόταση: Έστω $T \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$, όπου $\dim \mathcal{H} = \infty$, τότε:

(i) Κάθε μη-μηδενική ιδιοτιμή του T έχει πεπερασμένη πολλαπλότητα

(ii) $0 \in \sigma(T)$

Απόδειξη:

(i) Με άτοπο. Έστω $\lambda \neq 0$, ιδιοτιμή με άπειρη πολλαπλότητα.

Έστω $\{e_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του ιδιόχωρου της λ (δηλαδή του $\mathrm{Ker}(\lambda - T)$)

τότε $\|Te_n - Te_m\|^2 = \|\lambda e_n - \lambda e_m\| = 2 \cdot |\lambda|^2$

Άρα η (Te_n) δεν έχει Cauchy υπακολουθία.

(ii) Έστω αντίθετα ότι $0 \notin \sigma(T)$, τότε υπάρχει ο $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

Άρα $I = T \cdot T^{-1}$ συμπαγής. Άτοπο αφού $\dim(\mathcal{H}) = \infty$

Μάθημα 11ο ΕΦΜ 6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 13/3/2018

Άσκηση: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ τέτοιο ώστε $T^2 = 3T$. Να δειχθεί ότι $\sigma(T) \subseteq \{0,3\}$ και για $z \notin \{0,3\}$ να βρεθεί ένας απλός τύπος για το $(z-T)^{-1}$

Τελεστές Hilbert - Schmidt

Λήμμα: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$ τότε η ποσότητα $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \in [0,+\infty]$ είναι η ίδια για κάθε ορθοκανονική βάση $\{e_n\}$ του $\mathcal{H}$.

Απόδειξη:

Έστω $(f_k)_k$ ορθοκανονική βάση του $\mathcal{F}$, τότε: $\{$κάνω χρήση του: $\|x\|^2 = \sum |\langle x,e_n\rangle|^2\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_n, f_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, T^* f_k\rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|T^* f_k\|^2$$

Το ζητούμενο έπεται

Ορισμός: (i) Η ποσότητα $\|T\|_{HS} = \left(\sum_{n=1}^{\infty}\|Te_n\|^2\right)^{1/2}$ ονομάζεται Hilbert-Schmidt νόρμα του T.

(ii) Ο T ονομάζεται Hilbert-Schmidt αν η $\|T\|_{HS} < +\infty$

Πρόταση: (i) Η $\|\cdot\|_{HS}$ είναι νόρμα στον γραμμικό χώρο όλων των H-S τελεστών.

(ii) $\|T\| \leq \|T\|_{HS}$ $\forall\, T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$

Απόδειξη: (Άσκηση)

Πρόταση: Αν ο T είναι H-S τότε είναι συμπαγής

Απόδειξη:

Έστω T H-S, για κάθε $x \in \mathcal{H}$ έχουμε $Tx = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \langle x,e_n\rangle \cdot e_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,e_n\rangle Te_n$

Για $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $T_k x = \sum_{n=1}^{k} \langle x,e_n\rangle Te_n$, τότε ο T_k είναι συμπαγής, αφού είναι πεπερασμένης τάξης. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $T_k \longrightarrow T$

Έστω ένα $x \in \mathcal{H}$ τότε $\|T_k x - Tx\|^2 = \left\|\sum_{n=k+1}^{\infty} \langle x,e_n\rangle Te_n\right\|^2$

$\leq \left(\sum_{n=k+1}^{\infty} |\langle x,e_n\rangle|\, \|Te_n\|\right)^2 \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |\langle x,e_n\rangle|^2 \cdot \alpha_k$, όπου $\alpha_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \|Te_n\|^2$

$\leq \alpha_k \|x\|^2$

Άρα $\|T_k - T\| \leq \alpha_k \longrightarrow 0$ (ουρά συγκλίνουσας σειράς)

Άρα T συμπαγής.

Πρόταση: Στον χώρο $L^2(\Omega)$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$, έστω ο ολοκληρωτικός τελεστής $(Ku)(x) = \int_\Omega k(x,y)\cdot u(y)\,dy$. Αν $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$, δηλαδή $\int_\Omega\int_\Omega |k(x,y)|^2 dx\,dy < +\infty$ τότε ο K είναι Hilbert-Schmidt

Απόδειξη:

Έστω $\{e_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $L^2(\Omega)$ τότε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ke_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega |K e_n(x)|^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega \left| \int_\Omega k(x,y)\cdot e_n(y)\,dy \right|^2 dx \quad, \text{θέτω } k_x(y) = k(x,y)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega |\langle k_x, e_n \rangle|^2 dx$$

$$= \int \|k_x\|^2 dx = \int_\Omega\int_\Omega |k(x,y)|^2 dy\,dx < +\infty$$

Φασματική Θεωρία για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές

Ορισμός: Έστω M κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$ και $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$

(i) Λέμε ότι ο T αφήνει τον M αναλλοίωτο αν $x \in M \Rightarrow Tx \in M$

(ii) Λέμε ότι ο T ανάγει τον M αν αφήνει αναλλοίωτους τους M και $M^\perp$

Λήμμα: Αν ο T είναι αυτοσυζυγής, τότε ανάγει όλους τους ιδιοχώρους του.

Απόδειξη:

Έστω $\lambda \in \mathbb{R}$ μια ιδιοτιμή του T και $M = \ker(T-\lambda)$ ο αντίστοιχος ιδιόχωρος

Έστω $x \in M$ τότε $Tx = \lambda x \in M$

Έστω $x \in M^\perp$, έστω $y \in M$ $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle = \langle x, \lambda y\rangle = \lambda\langle x,y\rangle = 0$

Άρα $Tx \in M^\perp$ άρα ο T ανάγει τον M

Παρατήρηση: Έστω ότι ο T ανάγει τον M ορίζονται τότε:

$T_1 = T|_M : M \longrightarrow M$

$T_2 = T|_{M^\perp} : M^\perp \longrightarrow M^\perp$

Έστω $x = x_1 \oplus x_2$ τότε $Tx = T(x_1 + x_2) = Tx_1 \oplus Tx_2$ δηλαδή

$T(x_1 \oplus x_2) = T_1 x_1 \oplus T_2 x_2$

Σε μπλοκ μορφή $\quad T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$

ΕΦΜ 6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 13/3/2018

Γενικά αν $T:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ και $\mathcal{H}=M\oplus M^{\perp}$ τότε μπορούμε πάντα να γράφουμε $T=\begin{bmatrix} A & B \\ \Gamma & \Delta \end{bmatrix}$ όπου εννοούμε ότι:
$T(x_1\oplus x_2)=(Ax_1+Bx_2)\oplus(\Gamma x_1+\Delta x_2)$ όπου
$A:M\to M,\ B:M^{\perp}\to M,\ \Gamma: M\to M^{\perp},\ \Delta: M^{\perp}\to M^{\perp}$

Λήμμα: Αν ο T είναι αυτοσυζυγής τότε $\|T\|=\sup\limits_{\|x\|=1}|\langle Tx,x\rangle|$

Απόδειξη:

Έστω $M=\sup\limits_{\|x\|=1}|\langle Tx,x\rangle|$

• $M\leq\|T\|$

Έστω $\|x\|=1$ τότε $|\langle Tx,x\rangle|\leq\|Tx\|\,\|x\|\leq\|T\|$ άρα $M\leq\|T\|$

• $\|T\|\leq M$

Έστω $x,y\in\mathcal{H}$ τότε

$\langle T(x+y),x+y\rangle-\langle T(x-y),x-y\rangle=$

$=\langle Tx,x\rangle+\langle Tx,y\rangle+\langle Ty,x\rangle+\langle Ty,y\rangle-\langle Tx,x\rangle+\langle Tx,y\rangle+\langle Ty,x\rangle-\langle Ty,y\rangle$

$=4Re\langle Tx,y\rangle$ $\quad\left\{|\langle Tx,x\rangle|=\|x\|^2\left|\langle T\frac{x}{\|x\|},\frac{x}{\|x\|}\rangle\right|\leq M\|x\|^2\right\}$

Άρα $4|Re\langle Tx,y\rangle|\leq|\langle T(x+y),x+y\rangle|+|\langle T(x-y),x-y\rangle|$

$\leq M\|x+y\|^2+M\|x-y\|^2=2M(\|x\|^2+\|y\|^2)$

Άρα $|Re\langle Tx,y\rangle|\leq M$ $\forall x,y$ με $\|x\|=\|y\|=1$

Άρα $|Re\langle Tx,y\rangle|\leq M\|x\|\cdot\|y\|$

Επιλέγοντας $y=Tx$ παίρνουμε

$\|Tx\|^2\leq M\|x\|\,\|Tx\|$ $\forall x\in\mathcal{H}$ και άρα $\|Tx\|\leq M\|x\|$ $\forall x\in\mathcal{H}\Rightarrow\|T\|\leq M$.

Λήμμα: Έστω T συμπαγής αυτοσυζυγής, τότε ένα τουλάχιστον από τα $\pm\|T\|$ είναι ιδιοτιμή του T.

Απόδειξη:

• Αν $T=0$ τότε ισχύει

• Έστω $T\neq0$ Από προηγούμενο Λήμμα $\exists\,(x_n)\subset\mathcal{H}$ όπου $\|x\|=1$ τέτοια ώστε $|\langle Tx_n,x_n\rangle|\longrightarrow\|T\|$.

Έπεται ότι η ακολουθία $(\langle Tx_n,x_n\rangle)$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$

Άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\langle Tx_{n_k},x_{n_k}\rangle\longrightarrow\lambda$

Άρα $|\lambda| = \|T\|$ άρα $\lambda = \|T\|$ ή $-\|T\|$

Τότε $\|Tx_{n_k} - \lambda x_{n_k}\|^2 = \|Tx_{n_k}\|^2 + \lambda^2 - 2\lambda \langle Tx_{n_k}, x_{n_k}\rangle$

$\leq \|T\|^2 + \lambda^2 - 2\lambda \langle Tx_{n_k}, x_{n_k}\rangle \longrightarrow 2\lambda^2 - 2\cdot\lambda\cdot\lambda = 0$

Αφού T συμπαγής υπάρχει (n_{k_j}) τέτοιο ώστε $Tx_{n_{k_j}} \longrightarrow y \in \mathcal{H}$

Άρα $x_{n_{k_j}} = \frac{1}{\lambda}(\lambda x_{n_{k_j}} - Tx_{n_{k_j}}) + \frac{1}{\lambda} Tx_{n_{k_j}} \longrightarrow \frac{1}{\lambda} 0 + \frac{1}{\lambda} y = \frac{1}{\lambda} y$.

Τότε $Ty = \lambda \cdot \lim Tx_{n_{k_j}} = \lambda y$

Ισχύει $\|y\| = \lim \|\lambda x_{n_{k_j}}\| = |\lambda| \neq 0$ Άρα λ ιδιοτιμή

Μάθημα 12ο ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 15/3/2018

Θεώρημα (Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές)
Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $(\dim\mathcal{H} = +\infty)$ συμπαγής και αυτοσυζυγής. Τότε:
(i) Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του $\mathcal{H}$.
(ii) Έστω $\{\lambda_n\}$ οι μη μηδενικές ιδιοτιμές του $\mathcal{H}$ διατεταγμένες ώστε $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$. Η ακολουθία $\{\lambda_n\}$ είναι τότε είτε πεπερασμένη είτε μηδενική
(iii) Αν γράψουμε τη βάση των ιδιοδιανυσμάτων ως $\{\varphi_n\} \cup \{\psi_n\}$, όπου τα $\{\varphi_n\}$ είναι ιδιοδιανύσματα των μη μηδενικών ιδιοτιμών και $\psi_n \in Ker(T)$ τότε ισχύει $T = \sum_n \lambda_n \cdot \varphi_n \otimes \varphi_n$
(iv) $\sigma(T) = \{\lambda_n\} \cup \{0\}$

Παρατήρηση: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και $\{e_n\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$.
Έστω $x \in \mathcal{H}$ και $y = Tx$, τότε $x = \sum_n \langle x, e_n\rangle e_n$, $y = \sum_n \langle y, e_n\rangle e_n$
όμως $y = Tx = \sum_n \langle x, e_n\rangle \cdot Te_n$ Γράφουμε $T e_n = \sum_k \alpha_{kn} e_k$

Άρα $y = \sum_n \langle x, e_n\rangle \cdot \sum_k \alpha_{kn} e_k = \sum_k \left[\sum_n \alpha_{kn} \langle x, e_n\rangle\right] e_k$
Άρα $\langle y, e_n\rangle = \sum_n \alpha_{kn} \langle x, e_n\rangle$, $y_k = \sum_n \alpha_{kn} x_n$
ο άπειρος πίνακας (α_{ij}) ονομάζεται πίνακας του T ως προς τη βάση $\{e_n\}$
Θα βρούμε τον πίνακα του T ως προς τη βάση $\{\varphi_n\} \cup \{\psi_n\}$, τότε
$\langle T\varphi_n, \varphi_n\rangle = \lambda_n$, $\langle T\varphi_n, \varphi_m\rangle = 0$ $n \neq m$, $\langle T\psi_n, * \rangle = 0$
Άρα ο πίνακας του T ως προς τη βάση $\{\varphi_n\} \cup \{\psi_n\}$ είναι ο

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{cc} \varphi_n & \psi_n \end{array} \\
\begin{array}{c} \varphi_n \\ \\ \psi_n \end{array} &
\left[\begin{array}{c|c}
\begin{matrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \lambda_3 \ddots \end{matrix} & 0 \\
\hline
0 & \begin{matrix} 0 & & 0 \\ & 0 \ddots & \\ & & 0 \end{matrix}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

Απόδειξη Θεωρήματος

Ορίζουμε $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$, $T_1 = T$. Αν $T_1 = 0$ τότε ισχύει

Έστω ότι $T_1 \neq 0$, τότε ο T_1 έχει μια μη μηδενική ιδιοτιμή $\lambda_1 \neq 0$ $|\lambda_1| = \|T_1\|$. Έστω φ_1 αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $\|\varphi_1\| = 1$ ότι ανάγει τον υπόχωρο $<\varphi_1>$. Θέτουμε $\mathcal{H}_2 = <\varphi_1>^{\perp}$

ορίζουμε $T_2 = T_1|_{\mathcal{H}_2} \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2)$

Άρα ως προς την ανάλυση $\mathcal{H}_1 = <\varphi_1> \oplus \mathcal{H}_2$ έχουμε $T_1 = \lambda_1 \oplus T_2$

Αν ο $T_2 = 0$ τότε όλα ok.

Έστω ότι $T_2 \neq 0$ τότε ο T_2 έχει μια ιδιοτιμή $\lambda_2 \neq 0$ με $|\lambda_2| = \|T_2\|$

Έστω φ_2 ένα αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα με $\|\varphi_2\| = 1$

Ορίζουμε $\mathcal{H}_3 = <\varphi_2>^{\perp \mathcal{H}_2} = <\varphi_1, \varphi_2>^{\perp \mathcal{H}}$, τότε $\mathcal{H} = <\varphi_1> \oplus <\varphi_2> \oplus \mathcal{H}_3$

ορίζουμε $T_3 = T|_{\mathcal{H}_3}$ και ού το καθεξής

Στο κ βήμα έχουμε, κ ιδιοδιανύσματα $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ με ιδιοτιμές $\lambda_k \neq 0$.

Ισχύει ότι $|\lambda_{k-1}| = \|T_{k-1}\| \geq \|T_{k-1}|_{\mathcal{H}_k}\| = \|T_k\| = |\lambda_k|$

Ορίζουμε $\mathcal{H}_{k+1} = <\varphi_k>^{\perp \mathcal{H}_k} = <\varphi_1, \dots, \varphi_k>^{\perp \mathcal{H}}$ και $T_{k+1} = T|_{\mathcal{H}_{k+1}}$

Άρα $\mathcal{H} = <\varphi_1> \oplus \dots \oplus <\varphi_k> \oplus \mathcal{H}_{k+1}$

και $T = \lambda_1 \oplus \lambda_2 \oplus \dots \oplus \lambda_k \oplus T_{k+1}$

- $\exists\, k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T_{k+1} = 0$. Έστω $x \in \mathcal{H}$ τότε $x - \sum_{j=1}^{k} <x, \varphi_j> \varphi_j \in \mathcal{H}_{k+1}$

Άρα $T(x - \sum_{j=1}^{k} <x, \varphi_j> \cdot \varphi_j) = 0$, δηλαδή

$Tx = T(\sum_{j=1}^{k} <x, \varphi_j> \varphi_j) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j <x, \varphi_j> \varphi_j$, δηλαδή $T = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \varphi_j \otimes \varphi_j$

Ο $\mathcal{H}_{k+1}$ έχει μια ορθοκανονική βάση $\{\psi_n\}$ τότε η $\{\varphi_n\} \cup \{\psi_n\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του $\mathcal{H}$ $(\mathcal{H}_{k+1} = \mathrm{Ker}(T))$

- $T_k \neq 0 \ \forall\, k \in \mathbb{N}$. Άρα οι $\{\varphi_n\}$, $\{\lambda_n\}$ είναι άπειρες ακολουθίες.

Ισχυρισμός: $\lambda_n \to 0$.

Έστω αντίθετα ότι $\lambda_n \not\to 0$, τότε $\exists\, \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $|\lambda_n| \geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$

Για $n \neq m$ έχουμε τότε $\|T\varphi_n - T\varphi_m\|^2 = \|\lambda_n \varphi_n - \lambda_m \varphi_m\|^2 = |\lambda_n|^2 + |\lambda_m|^2 \geq 2 \cdot \varepsilon^2$

Άρα η $(T\varphi_n)$ δεν έχει Cauchy υπακολουθία. Άτοπο.

Έστω $x \in \mathcal{H}$, $k \in \mathbb{N}$ τότε $x - \sum_{j=1}^{k} <x, \varphi_j> \varphi_j \in \mathcal{H}_{k+1}$.

Άρα $\|Tx - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j <x, \varphi_j> \varphi_j\| = \|T P_{\mathcal{H}_{k+1}} x\| = \|T_{k+1} P_{\mathcal{H}_{k+1}} x\| \leq \|T_{k+1}\| \cdot \|x\| = |\lambda_{k+1}| \cdot \|x\|$

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 15/3/2018

Άρα $\|T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \varphi_j \otimes \varphi_j\| \leq |\lambda_{n+1}| \longrightarrow 0$ Άρα $T = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \varphi_j \otimes \varphi_j$

Έστω $\{\psi_j\}$ ορθοκανονική βάση του $Ker(T)$. Θα δείξουμε ότι $\{\varphi_j\} \cup \{\psi_j\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$.
Έστω $x \in \mathcal{H}$ τότε $T(x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j) = 0$, άρα $x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j \in Ker(T)$
άρα $x - \sum_j \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j = \sum_k \langle x - \sum_j \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j, \psi_k \rangle \psi_k = \sum_k \langle x, \psi_k \rangle \psi_k$ (επειδή $\langle \varphi_j, \psi_k \rangle = 0$)

Άρα $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j + \sum_k \langle x, \psi_k \rangle \psi_k$ Άρα $\{\varphi_j\} \cup \{\psi_k\}$ ορθοκανονική βάση.
Προφανώς $\{\lambda_n\} \subset \sigma(T)$ άρα αν τα $\{\varphi_n\}$ είναι άπειρα, τότε $\overline{\{\lambda_n\}} = \{\lambda_n\} \cup \{0\} \subset \sigma(T)$
Αν τα $\{\varphi_n\}$ είναι πεπερασμένα τότε το 0 είναι ιδιοτιμή
Έστω τώρα ότι $z \notin \{\lambda_n\} \cup \{0\}$ τότε ελέγχουμε ότι ο $S = \sum_n (z - \lambda_n)^{-1} \varphi_n \otimes \varphi_n + \sum_n z^{-1} \psi_n \otimes \psi_n$ είναι φραγμένος και είναι αντίστροφος του $z - T$ άρα $z \in \rho(T)$

Παρατήρηση: Έστω $\{e_n\} = \{\varphi_n\} \cup \{\psi_n\}$. $Te_n = \mu_n e_n$ τότε $T = \sum_n \mu_n e_n \otimes e_n$, δηλαδή $x = \sum x e_n$ τότε $Tx = \sum_n \lambda_n x e_n$

$(x_1, x_2, \dots) \xrightarrow{S = UTU^{-1}} (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$ Ακριβέστερα αν $U : \mathcal{H} \to \ell^2$
$Ux = (x_1, x_2, \dots)$ μοναδιαίος $x_n = \langle x, e_n \rangle$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "U"] \arrow[d, "T"'] & \ell^2 \arrow[d] \\ \mathcal{H} \arrow[r] & \ell^2 \end{tikzcd}$$
$UTU^{-1} = S$ μοναδιαία ισοδύναμοι.

Μάθημα 13ο ΕΦΜΣ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 20/3/2018

Άσκηση: Να δειχθεί ότι αν $T^2 = 3T$ τότε $\sigma(T) \subseteq \{0,3\}$

Λύση:

Θα αναζητήσουμε τον $(z-T)^{-1}$ στην μορφή $(z-T)^{-1} = \alpha_0 + \alpha_1 T$

Έστω $z \notin \{0,3\}$ τότε θέλουμε $I = (z-T)(\alpha_0 + \alpha_1 T) = z\alpha_0 I + z\alpha_1 T - \alpha_0 T - \alpha_1 T^2$

$= z\alpha_0 I + (z\alpha_1 - \alpha_0 - 3\alpha_1)T$ Άρα πρέπει

$z\alpha_0 = 1$ και $z\alpha_1 - \alpha_0 - 3\alpha_1 = 0 \underset{z\neq 3}{\overset{z\neq 0}{\iff}} \alpha_0 = z^{-1}$ και $\alpha_1(z-3) = \alpha_0 \Rightarrow \alpha_1 = z^{-1}(z-3)^{-1}$

Άρα αν $z \notin \{0,3\}$ ο $z-T$ αντιστρέφεται άρα $\sigma(T) \subseteq \{0,3\}$

Παρατήρηση: Το παραπάνω έπεται από το εξής θεώρημα.

Αν $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και $p(\lambda)$ μιγαδικό πολυώνυμο τότε $\sigma(p(T)) = p(\sigma(T))$

Για την άσκηση για $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda$ έχουμε $p(T) = 0$ άρα $\sigma(p(T)) = \{0\}$

και άρα $p(\sigma(T)) = \{0\}$ δηλαδή $r \in \sigma(T) \Rightarrow p(r) = 0 \Rightarrow r \in \{0,3\}$

Δηλαδή το $\sigma(T)$ περιέχεται στο σύνολο των ριζών του $p(\lambda)$

12) Έστω P και Q οι ορθογώνιες προβολές πάνω στους κλειστούς υπόχωρους M και N αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $\langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle$, $x \in \mathcal{H}$

(ii) $\|Px\| \leq \|Qx\|$, $x \in \mathcal{H}$

(iii) $PQ = QP = P$

(iv) $M \subset N$

Λύση:

(i)$\iff$(ii) $\|Px\| = \langle Px, Px\rangle = \langle P^*Px, x\rangle = \langle P^2x, x\rangle = \langle Px, x\rangle \leq \langle Qx, x\rangle = \langle Q^2x, x\rangle$

$= \langle Q^*Qx, x\rangle = \langle Qx, Qx\rangle = \|Qx\|$

(iii)$\Rightarrow$(iv) Έστω $x \in M \Rightarrow x = Px = QPx \in Ran(Q) = N$

(iv)$\Rightarrow$(iii) $x \in \mathcal{H}$ $Px \in M \in N \Rightarrow QPx = Px$ άρα $QP = P$ και $(QP)^* = P^* \Rightarrow P^*Q^* = P^* \Rightarrow PQ = P$

(ii)$\Rightarrow$(iv) Έστω $x \in M$, τότε $\|Px\| = \|x\| \leq \|Qx\|$. Όμως $\|Qx\| \leq \|x\|$ άρα $\|x\| = \|Qx\|$

Όμως έχουμε ότι $x = \underset{\in N}{Qx} + \underset{\in N^\perp}{(x - Qx)}$, άρα $\|x\|^2 = \|Qx\|^2 + \|x - Qx\|^2 \Rightarrow \|x - Qx\|^2 = 0$

$\Rightarrow x = Qx$ άρα $x \in N$

(iii)$\Rightarrow$(ii) Έστω $x \in \mathcal{H} \Rightarrow \|Px\| = \|PQx\| \leq \|Qx\|$

(13) Έστω (α_n) φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών και $A: \ell^2 \to \ell^2$ ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός τελεστής $A(x_1, x_2, \dots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$

Να δειχθεί ότι ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν $\alpha_n \to 0$

Λύση:

($\Rightarrow$) Έστω αντίθετα ότι $\alpha_n \not\to 0$. Άρα $\exists\, \varepsilon > 0$ και (α_{n_k}) υπακολουθία της (α_n): $|\alpha_{n_k}| \geq \varepsilon$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Για $k \neq j$ έχουμε $\|Ae_{n_k} - Ae_{n_j}\|^2 = |\alpha_{n_k}|^2 + |\alpha_{n_j}|^2 \geq 2 \cdot \varepsilon^2$

Άρα η (Ae_{n_k}) δεν έχει Cauchy υπακολουθία. Άτοπο άρα $\alpha_n \to 0$.

($\Leftarrow$) Έστω ότι $\alpha_n \to 0$. Ορίζουμε $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $A_n(x_1, x_2, \dots) = (\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n, 0, 0, \dots)$

Έστω $x \in H$ και $\|Ax - A_n x\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k x_k|^2 \leq \sup_{k \geq n+1} \{|\alpha_k|\}^2 \|x\|^2$

Άρα $\|A_n - A\| \leq \sup_{k \geq n+1} |\alpha_k| \to 0$. Αφού $\{A_n\}$ συμπαγείς και ο A είναι συμπαγής

(14) $L^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ $h \in L^\infty(\Omega)$, $|\Omega| < \infty$ $(Tu)(x) = h(x) u(x)$.

Να δειχθεί ότι δεν έχει ιδιοτιμές πεπερασμένης πολλαπλότητας

Λύση:

Έστω λ ιδιοτιμή του T. Θα δείξουμε ότι έχει άπειρη πολλαπλότητα

Δηλαδή $\dim \ker(\lambda - T) = \infty$. Υπάρχει τότε συνάρτηση $\varphi \neq 0$ σχεδόν παντού

τέτοια ώστε: $T\varphi = \lambda \varphi$

Δηλαδή $h(x)\varphi(x) = \lambda \varphi(x)$ σχεδόν παντού.

$(h(x) - \lambda)\varphi(x) = 0$ σχεδόν παντού

Έστω $\varepsilon = \{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}$. Τότε $\mu(\varepsilon) > 0$ και $h(x) = \lambda$ σχεδόν παντού στο ε.

Θεωρούμε τον υπόχωρο του $L^2(\Omega)$

$L = \{u \in L^2(\Omega) : u(x) = 0 \text{ για } x \in \Omega \setminus \varepsilon\} \simeq L^2(\varepsilon)$

Τότε κάθε $\psi \in L$ είναι ιδιοσυνάρτηση για την ιδιοτιμή λ

δηλαδή $h(x)\psi(x) = \lambda \psi(x)$ σχεδόν παντού $\forall\, \psi \in L$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\dim L = \infty$

Ισχύει ότι η $\chi_\varepsilon \in L$. γράφουμε $\varepsilon = \varepsilon_1 \cup \varepsilon_2$ με $\mu(\varepsilon_1), \mu(\varepsilon_2)$

και $\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \emptyset$, τότε $\chi_{\varepsilon_1}, \chi_{\varepsilon_2} \in L$ για ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις

του T για το λ. Αναδρομικά έχουμε $\dim L = \infty$

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 20/3/2018

Εφαρμογή φασματικού Θεωρήματος: Το πρόβλημα Sturm-Liouville.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $u:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ λέγεται απόλυτα συνεχής αν $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0 : \forall\, n\in\mathbb{N}$ και $\forall$ n διαδοχικά διαστήματα $[x_k,y_k]\subseteq[\alpha,\beta]$ έχουμε ότι αν $\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)<\delta$ τότε $\sum_{k=1}^{n}|u(y_k)-u(x_k)|<\varepsilon$.

Παρατήρηση: Έστω $u:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ τότε u Lipschitz $\Rightarrow$ u απόλυτα συνεχής $\Rightarrow$ u ομοιόμορφα συνεχής.

Μάθημα 14ο ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 22/3/2018.

Άσκηση: Έστω T πολλαπλασιαστικός τελεστής στον $L^2(\Omega)$. Ο T δεν είναι συμπαγής εκτός αν $T=0$

Λύση:

Έστω ότι T συμπαγής και $T\neq 0$. Έχουμε $(Tu)(x)=h(x)u(x)$, $x\in\Omega$ όπου $h\in L^\infty(\Omega)$

Μέτρο Lebesgue

Αφού $T\neq 0$ ισχύει ότι το $E=\{x\in\Omega . h(x)\neq 0\}$ έχει $|E|>0$

Ισχυρισμός: Υπάρχουν σύνολα $A\subseteq\Omega$ με $|A|>0$ και $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε $|h(x)|\geq\varepsilon \ \forall x\in A$

Έχουμε ότι $E=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$ όπου $E_n=\{x\in\Omega : |h(x)|>1/n\}$

Αφού $|E|>0 \Rightarrow \exists n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|E_{n_0}|>0$. Άρα $A=E_{n_0}$, $\varepsilon=1/n_0$

Θεωρούμε σύνολα $A_n\subset A$ τέτοια ώστε

(i) $A_n\cap A_m=\emptyset$ $n\neq m$

(ii) $|A_n|>0 \ \forall n$

Ορίζουμε $\varphi_n=\dfrac{\chi_{A_n}}{\|\chi_{A_n}\|}$ τότε για $m\neq n$

$$\|T\varphi_n-T\varphi_m\|^2=\int_\Omega|h(x)\varphi_n(x)-h(x)\varphi_m(x)|^2dx=\int_{A_n\cup A_m}|h(x)|^2|\varphi_n(x)-\varphi_m(x)|^2dx$$
$$\geq\varepsilon^2\int_{A_n\cup A_m}(\varphi_n-\varphi_m)^2dx=\varepsilon^2\int_{A_n\cup A_m}(\varphi_n^2+\varphi_m^2)dx=2\cdot\varepsilon^2$$

Άρα η $(T\varphi_n)$ έχει Cauchy υπακολουθία. Άτοπο

Πρόταση: (i) Αν η $u:[\alpha,\beta]\longrightarrow\mathbb{C}$ είναι απόλυτα συνεχής, τότε είναι σχεδόν ή παντού παραγωγίσιμη $u'\in L^1(\alpha,b)$ και
$u(x)=u(\alpha)+\int_\alpha^x u'(t)dt$

(ii) Αντίστροφα αν $v\in L^1(\alpha,b)$ τότε η $u(x)=\int_\alpha^x v(t)\,dt$ είναι απόλυτα συνεχής και $u'=v$ σχεδόν παντού

Το Πρόβλημα Sturm - Liouville

Ορισμός: Ονομάζουμε τελεστή Sturm-Liouville στον $L^2(0,1)$, εναν τελεστή της μορφής: $(Lu)(x)=-\dfrac{d}{dx}\left(p(x)\dfrac{du}{dx}\right)+q(x)u(x)$

με συνοριακές συνθήκες της μορφής:

$$\begin{cases} \alpha_1 u(0) + \alpha_2 u'(0) = 0 \\ \beta_1 u(1) + \beta_2 u'(1) = 0 \end{cases}$$ όπου

(i) p, q συνεχείς στο $[0,1]$ και $p>0$

(ii) p' υπάρχει και είναι συνεχής στο $[0,1]$

(iii) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ και $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$

Τον L τον θεωρούμε πάνω σε συναρτήσεις που ανήκουν στο πεδίο ορισμού $D(L) \subsetneq L^2(0,1)$, το οποίο αποτελείται από όλες τις $u \in L^2(0,1)$ που είναι τέτοιες ώστε:

(i) η u' υπάρχει και είναι απόλυτα συνεχής

(ii) $u'' \in L^2(0,1)$

(iii) η u ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες.

Για $u \in D(L)$ το Lu είναι καλά ορισμένο και ανήκει στον $L^2(0,1)$

Άσκηση: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ με $\dim Ran(T) = n$. Να δειχθεί ότι υπάρχουν $u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_n \in \mathcal{H}$ με $\|v_n\| = 1$, τέτοια ώστε:

$T = \sum_{k=1}^{n} u_k \otimes v_k$, δηλαδή $Tx = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle v_k$

Λύση:

Έστω $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $Ran(T)$ τότε $\forall x \in \mathcal{H}$ έχουμε:

$$Tx = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) v_k$$

Άρα $\forall m \in \{1, 2, \dots, n\}$

$$\langle Tx, v_m \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x) v_k, v_m \rangle = \alpha_m(x)$$

$$\| $$

$$\langle x, T^* v_m \rangle$$

Άρα $Tx = \sum_{k=1}^{n} \langle x, u_k \rangle v_k$

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 22/3/2018

Άσκηση: Έστω P, Q οι ορθογώνιες προβολές στους M, N. Να δειχθεί ότι τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

(i) $P+Q$ ορθογώνια προβολή

(ii) $PQ = QP = 0$

(iii) $M \perp N$

και ότι αν ισχύουν οι (i)-(iii) τότε $\mathrm{Ran}(P+Q) = M+N$

($\Rightarrow M+N$ κλειστός υπόχωρος)

Λύση:

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Έστω $x \in H$ τότε $Px \in M \subset N^{\perp}$ άρα $QPx = 0 \Rightarrow QP = 0$

όμοια $PQ = 0$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Έχουμε $(P+Q)^* = P^* + Q^* = P + Q$ και

$(P+Q)^2 = P^2 + Q + PQ + QP = P^2 + Q^2 = P + Q$ Άρα $P+Q$ ορθογώνια προβολή

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Έστω $x \in M, y \in N$ τότε

$\langle x, y \rangle = \langle Px, Qy \rangle = \langle x, PQy \rangle = 0 \Rightarrow M \perp N$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Έχουμε $P+Q = (P+Q)^2 = P^2 + PQ + QP + Q^2 \Rightarrow PQ + QP = 0$

Άρα $P^2Q + PQP = 0 \longrightarrow PQ + PQP = 0$

όμως $PQP + QP^2 = 0 \rightsquigarrow PQP + QP = 0$

$\Rightarrow PQ = QP \Rightarrow PQ = QP = 0$

Θα δείξω ότι $\mathrm{Ran}(P+Q) = M+N$

ισχύει $\mathrm{Ran}(P+Q) \subseteq \mathrm{Ran}(P) + \mathrm{Ran}(Q) = M+N$

Έστω $u \in M+N \Rightarrow u = x+y$, $x \in M, y \in N$ τότε

$(P+Q)u = P(x+y) + Q(x+y) = Px + \cancel{Py}^{0} + \cancel{Qx}^{0} + Qy = Px + Qy = x + y = u$

άρα $u \in \mathrm{Ran}(P+Q)$

Μάθημα 15º ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 27/3/2018

Υποθέτουμε $Ker(L)=\{0\}$

Θεώρημα: Ο L είναι 1-1 και επί και ο L^{-1} είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής
$L: D(L) \longrightarrow L^2(0,1)$
$L^{-1}: L^2(0,1) \longrightarrow L^2(0,1)$

Απόδειξη:

Είναι γνωστό ότι υπάρχουν μη τετριμμένες C^2 συναρτήσεις u_1, u_2 τέτοιες ώστε:

$$\begin{cases} -(pu_i')' + qu_i = 0 \quad \text{στο } [0,1] \quad i=1,2 \\ \alpha_1 u_1(0) + \alpha_2 u_1'(0) = 0 \\ \beta_1 u_2(1) + \beta_2 u_2'(1) = 0 \end{cases}$$

Τότε $u_1(t)^2 + u_1'(t)^2 \neq 0$ και $u_2(t)^2 + u_2'(t)^2 \neq 0$

Ορίζουμε $w(t) = u_1 u_2' - u_2 u_1'$ τότε

$(pw)' = [pu_1u_2' - pu_2u_1']' = (pu_2')'u_1 + pu_2'u_1' - (pu_1')'u_2 - pu_1'u_2' = qu_2u_1 - qu_1u_2 = 0$

Άρα $pw = \text{σταθερό} = -c$.

Θα δείξω ότι $c \neq 0$

Έστω αντίθετα ότι $c=0$. Τότε $w(t)=0 \ \forall\, t\in[0,1]$

Ειδικότερα $u_1(0)u_2'(0) - u_2(0)u_1'(0)$

Ισχύει $u_1(0)\neq 0$ ή $u_1'(0)\neq 0$. Έστω $u_1'(0)\neq 0$. Τότε $u_2(0) = \dfrac{u_2'(0)u_1(0)}{u_1'(0)}$

Άρα $\alpha_1 u_2(0) + \alpha_2 u_2'(0) = \dfrac{\alpha_1 u_2'(0) u_1(0)}{u_1'(0)} + \alpha_2 u_2'(0) = \dfrac{u_2'(0)}{u_1'(0)}(\alpha_1 u_1(0) + \alpha_2 u_1'(0))$

Έπεται ότι $u_2 \in D(L)$ και $Lu_2 = 0$. Δηλαδή $u_2 \in Ker(L)$

Άτοπο, αφού υποθέσαμε ότι $Ker(L)=\{0\}$. Άρα $c\neq 0$.

Ορίζουμε $(Kf)(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s)\,ds$ όπου

$$k(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{c} u_1(t) u_2(s) & \text{αν } t \leq s \\ \frac{1}{c} u_2(t) u_1(s) & \text{αν } t \geq s \end{cases}$$

Ισχύει $k(t,s) = k(s,t) \in \mathbb{R} \implies K$ αυτοσυζυγής.

Επίσης $k(t,s)$ φραγμένη άρα $\int_0^1\int_0^1 k(t,s)^2\,dt\,ds < +\infty$

Άρα ο K είναι Hilbert-Schmidt (H-S), άρα είναι συμπαγής.

Θα δείξουμε ότι K αντιστρέψιμος και $K^{-1}=L$ (ισχύει $0\in\sigma(K)$)

Θα δείξουμε ότι:

(i) $LK=I$

(ii) $KL=I|_{D(L)}$

(i) Έστω $f\in L^2(0,1)$. Έστω $g=Kf$. Θα δείξω ότι $g\in D(L)$ και $Lg=f$

ορίζουμε τις συναρτήσεις

$v_1(x)=\frac{1}{c}\int_0^x u_1(t)f(t)\,dt \quad , v_2(x)=\frac{1}{c}\int_x^1 u_2(t)f(t)\,dt.$

Τότε $u_1(x)v_2(x)+u_2(x)v_1(x)=\frac{1}{c}\int_0^x \underbrace{u_1(t)u_2(x)}_{k(t,x)}f(t)\,dt+\frac{1}{c}\int_x^1 \underbrace{u_2(t)u_1(x)}_{k(t,x)}f(t)\,dt$

$=\int_0^1 k(t,x)f(t)\,dt=\int_0^1 k(x,t)f(t)\,dt=(Kf)(x)=g(x)$

Άρα $g=v_2u_1+v_1u_2$

Άρα g παραγωγίσιμη και $g'=v_2'u_1+v_2u_1'+v_1'u_2+v_1u_2'=$

$=-\frac{1}{c}u_2fu_1+v_2u_1'+\frac{1}{c}u_1fu_2+v_1u_2'=v_1u_2'+v_2u_1'$

Άρα η g είναι απόλυτα συνεχής και

$g''=v_1'u_2'+v_1u_2''+v_2'u_1'+v_2u_1''=\frac{1}{c}u_1fu_2'+v_1u_2''-\frac{1}{c}u_2fu_1'+v_2u_1'' \in L^2(0,1)$

Επίσης $\alpha_1 g(0)+\alpha_2 g'(0)=\alpha_1(v_2(0)u_1(0)+\cancel{v_1(0)}u_2(0))+\alpha_2(\cancel{v_1(0)}u_2'(0)+v_2(0)u_1'(0))$

$=v_2(0)[\alpha u_1(0)+\alpha_2u_1'(0)]=0.$

Όμοια βρίσκουμε $b_1g(1)+b_2g'(1)=0.$ Άρα $g\in D(L)$

Τέλος $Lg=-(pg')'+qg=-(p(v_1u_2'+v_2u_1'))'+q(u_1v_2+u_2v_1)=$

$=-(pu_2')'v_1-pv_1'u_2'-(pu_1')'v_2-pv_2'u_1'+qu_1v_2+qu_2v_1=$

$=v_1(\cancel{-(pu_2')'+qu_2})+v_2(\cancel{-(pu_1')'+qu_1})-pv_1'u_2'-pv_2'u_1'$

$=-pu_2'\frac{1}{c}u_1f-pu_1'(-\frac{1}{c}u_2f)=\frac{-pf}{c}(u_1u_2'-u_1'u_2)$

$=-\frac{1}{c}pwf^{c}=f.$

ΕΦΜ 6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 27/3/2018

(ii) Έστω $g \in D(L)$ τότε $LKLg = Lg \Rightarrow L(KLg - g) = 0$
Αφού $Ker(L) = \{0\} \Rightarrow KLg = g$

Θεώρημα: Υπάρχει ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα του $L^2(0,1)$ $\{\varphi_n\}$ το οποίο αποτελείται από ιδιοσυναρτήσεις του L. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές $\{\mu_n\}$ έχουν πεπερασμένη πολλαπλότητα και $|\mu_n| \longrightarrow +\infty$

Απόδειξη:
Ισχύει $L\varphi_n = \mu_n \varphi_n \iff K\varphi_n = \frac{1}{\mu_n}\varphi_n$ $\qquad k(x,t)$ συνάρτηση Green

Άσκηση: Να βρεθούν η συνάρτηση Green καθώς και οι ιδιοτιμές και ιδιοσυναρτήσεις για το πρόβλημα

$$\begin{cases} Lf = -f'' \\ f(0) = 0 \\ 3f(1) + f'(1) = 0 \end{cases}$$

Λύση:
Βρίσκουμε τις u_1, u_2

$\begin{cases} u_1'' = 0 \\ u_1(0) = 0 \end{cases}$ $\qquad u_1(x) = Ax + B$
$\qquad$ επιλέγουμε $u_1(x) = x$

$\begin{cases} u_2'' = 0 \\ 3u_2(1) + u_2'(1) = 0 \end{cases}$ $\qquad u_2 = Ax + B$
$\qquad 3(A+B) + A = 0 \iff 4A + 3B = 0$

επιλέγουμε $u_2(x) = 3x - 4$

Άρα $c = -W = -(u_1u_2' - u_2u_1') = -(3x - (3x-4)) = -4$

$$\text{Άρα } k(x,t) = \begin{cases} -\frac{1}{4}x(3t-4) & x \le t \\ -\frac{1}{4}t(3x-4) & x \geq t \end{cases}$$

λ ιδιοτιμή του $L \iff \exists\, \varphi \in D(L): \varphi \neq 0$ τέτοια ώστε $L\varphi = \lambda\varphi$
δηλαδή $-\varphi'' = \lambda\varphi \iff \varphi'' + \lambda\varphi = 0$

• $\lambda<0$ $\lambda=-\mu^2$ $(\mu>0)$ γενική λύση

$y(t)=c_1e^{\mu t}+c_2e^{-\mu t}$

$y'(t)=\mu c_1e^{\mu t}-\mu c_2e^{-\mu t}$

πρέπει $\begin{cases} c_1+c_2=0 \\ 3c_1e^{\mu}+3c_2e^{-\mu}+\mu c_1e^{\mu}-\mu c_2e^{-\mu}=0 \end{cases}$

$$\det=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3e^{\mu}+\mu e^{\mu} & 3e^{-\mu}-\mu e^{-\mu} \end{vmatrix} = 3e^{-\mu}-\mu e^{-\mu}-3e^{\mu}-\mu e^{\mu} \overset{?}{=} 0$$

$\Longleftrightarrow -3(e^{\mu}-e^{-\mu})=\mu(e^{\mu}+e^{-\mu})$

$3-\mu-3e^{2\mu}-\mu e^{2\mu}$ γνήσια φθίνουσα, αρκεί $F(0)\leq 0$

$F(0)=3-3=0$

Άρα ο L δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές

• $\lambda=0 \Rightarrow -\mu''=0 \Longleftrightarrow f(x)=Ax+B \Longleftrightarrow f(0)=B=0$

Τότε $3f(1)+f'(1)=0 \Longrightarrow A=0$.

Άρα το 0 δεν είναι ιδιοτιμή

• $\lambda>0$ $\lambda=\mu^2>0$

$-f''=\mu^2 f$ γενική λύση $f(x)=A\cos\mu x+B\sin\mu x$

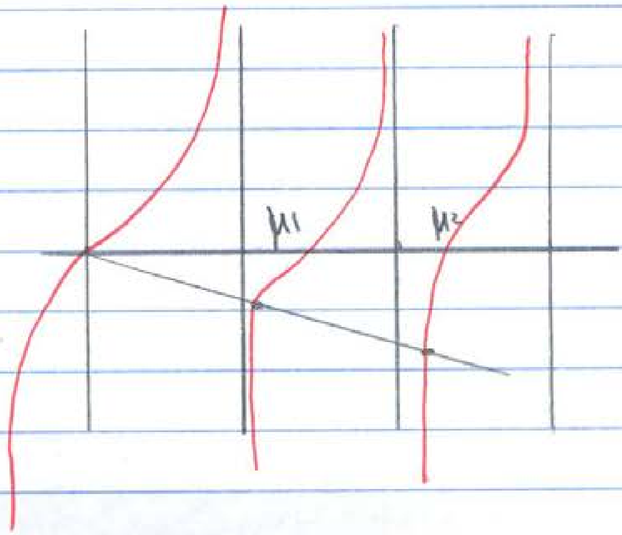
$f'(x)=-\mu A\sin\mu x+\mu B\cos\mu x$

$f(0)=0 \Rightarrow A=0$

Επίσης $(B=1)$ $3f(1)+f'(1)=3\sin\mu+\mu\cos\mu=\cos\mu\,(3\tan\mu+\mu)=0$

$\Longleftrightarrow -\mu/3=\tan\mu$

$$\varphi_n=\frac{\cos\mu_n x}{\|\cos\mu_n x\|}$$



Μάθημα 16º ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 29/3/2018

Ορισμός: Ονομάζουμε $\frac{3}{2}$-γραμμική μορφή (sesquilinear) σε έναν χώρο Hilbert μια απεικόνιση $A:(\cdot,\cdot): \mathcal{H}\times\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ για την οποία ισχύει ότι:

(i) $A(\lambda x+\mu y, z) = \lambda\, A(x,y) + \mu A(y,z)$ $\lambda,\mu \in \mathbb{C}$ $x,y,z\in\mathcal{H}$

(ii) $A(x, \lambda y+\mu z) = \bar{\lambda}\, A(x,y) + \bar{\mu}\, A(x,z)$

Επιπλέον

① Η 3/2-γραμμική μορφή A, λέγεται φραγμένη αν υπάρχει $\Lambda \geq 0$ τέτοιο ώστε $|A(x,y)| \leq \Lambda \cdot \|x\|\cdot\|y\|$

② λέγεται ελλειπτική αν $\exists\, \lambda>0$ τέτοιο ώστε $\mathrm{Re}\, A(x,x) \geq \lambda \cdot \|x\|^2$ $x\in\mathcal{H}$

Παράδειγμα: Στον $L^2(\Omega)$, έστω $h(x)$ συνάρτηση τέτοια ώστε

(i) $|h(x)| \geq \Lambda$ σχεδόν παντού

(ii) $\mathrm{Re}\, h(x) \geq \lambda$ σχεδόν παντού $(\lambda>0)$

Έστω $A(u,v) = \int_\Omega h(x)\, u(x)\, \overline{v(x)}\, dx$, τότε η A είναι μια 3/2-γραμμική φραγμένη ελλειπτική μορφή.

Θεώρημα (Lax-Milgram)

Έστω μια A, $\frac{3}{2}$ γραμμική μορφή στον $\mathcal{H}$, φραγμένη και ελλειπτική. Για κάθε φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό $\Pi: \mathcal{H}\to\mathbb{C}$ $\exists!\, u\in\mathcal{H}$ τέτοιο ώστε:

$A(v,u) = \Pi(v)$ $\forall\, v\in\mathcal{H}$.

Επιπλέον η απεικόνιση $\Pi \longrightarrow u$ είναι συνεχής.

Απόδειξη:

Έστω $u\in\mathcal{H}$, τότε $\forall\, v\in\mathcal{H}$ έχουμε: $|A(v,u)| \leq \Lambda\,\|v\|\,\|u\|$.

Άρα η απεικόνιση $v\to A(v,u)$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό.

Από το Θεώρημα Αναπαράστασης του Riesz υπάρχει μοναδικό $w=w(u)$ τέτοιο ώστε $A(v,w) = \langle v,w\rangle$ $\forall\, v\in\mathcal{H}$, επιπλέον

$$\|w\| = \sup_{\|v\|=1} |\langle v,w\rangle| = \sup_{\|v\|=1} |A(v,u)| \leq \Lambda\,\|u\|$$

Άρα η απεικόνιση $u\to w$ ορίζει το φραγμένο γραμμικό τελεστή:

$S:\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ $Su = w$. Άρα $\|S\| \leq \Lambda$

Επίσης $\exists\, f\in\mathcal{H}$ τέτοιο ώστε $\Pi(v) = \langle v,f\rangle$ $\forall\, v\in\mathcal{H}$.

Άρα το ζητούμενο: $\exists !\, u$ τέτοιο ώστε $A(v,u)=\Pi(v)\ \forall\, v\in H$ γράφεται ισοδύναμα

$\exists !\, u$ τέτοιο ώστε $\langle v, Su\rangle = \langle v, f\rangle\ \forall\, v\in H$, δηλαδή

$\exists !\, u$ τέτοιο ώστε $Su=f$.

Άρα πρέπει να δείξω ότι ο S είναι 1-1, επί με φραγμένο αντίστροφο.

Για $x\in H$ $\quad \lambda\|x\|^2 \le Re\, A(x,x) = Re\langle x, Sx\rangle \le |\langle x, Sx\rangle| \le \|x\|\,\|Sx\|$

και άρα $\|Sx\| \geq \lambda\|x\|$. Άρα ο S είναι 1-1

Θα δείξω ότι $Ran(S)$ είναι κλειστό

Έστω ότι $Sx_n \to y$ Τότε $\|Sx_n - Sx_m\| \geq \lambda \cdot \|x_n - x_m\|$

Άρα η (x_n) είναι Cauchy.

Έστω $x=\lim x_n$ τότε $Sx_n \to Sx$. Άρα $y=Sx\in Ran(S)$

Θα δείξω ότι $Ran(S)$ πυκνό.

Έστω $x\in Ran(S)^{\perp}$, τότε $\lambda\|x\|^2 \le Re\, A(x,x) = Re\langle x, Sx\rangle = 0$. Άρα $x=0$.

Τέλος ο S^{-1} είναι φραγμένος αφού $\|Sx\| \geq \lambda\|x\|$

Πρόταση: Έστω A, μια $\frac{3}{2}$ γραμμική φραγμένη ελλειπτική μορφή, η οποία είναι επιπλέον συμμετρική, δηλαδή $A(y,x)=\overline{A(x,y)}$.

Έστω Π ένα φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό και έστω $J(v)=\frac{1}{2}A(v,v)-Re\,\Pi(v)$, $v\in H$

Η J έχει ένα μοναδικό ελάχιστο, το οποίο λαμβάνεται στο $u\in H$ του Θεωρήματος Lax-Milgram

Απόδειξη:

Έστω $v\in H$ τότε $J(v)-J(u) = \frac{1}{2}(A(v,v)-A(u,u)) - Re\,\Pi(v-u)$

$= \frac{1}{2}(A(v,v)-A(u,u)) - Re\, A(v-u,u)$

έχουμε

$$Re\, A(v-u,u) = \frac{1}{2}\left(A(v-u,u)+\overline{A(v-u,u)}\right) = \frac{1}{2}\left[A(v-u,u)+A(u,v-u)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[A(v,u)-A(u,u)-A(u,u)+A(u,v)\right] = \frac{1}{2}\left[A(v,u)+A(u,v)\right] - A(u,u)$$

$$\text{Άρα } J(v)-J(u) = \frac{1}{2}\left[A(v,v)-A(v,u)-A(u,v)+A(u,u)\right]$$

$$= \frac{1}{2}A(u-v,u-v) \geq \frac{\lambda}{2}\|u-v\|^2$$

ΕΦΜ 6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 29/3/2018

Χώροι Sobolev

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό συνεκτικό χωρίο

Ορισμός: Λέμε ότι το U περιέχεται συμπαγώς στο Ω και γράφουμε $U \subset\subset \Omega$ αν
(i) $\bar{U} \subset \Omega$
(ii) $\bar{U}$ συμπαγές σύνολο ($\Longleftrightarrow$ U φραγμένο)

Πρόταση: Έστω $U \subset \Omega$. Ισχύει ότι $U \subset\subset \Omega$ αν και μόνο αν U είναι φραγμένο και $\text{dist}(U, \partial\Omega) > 0$. Δηλαδή $\exists\ \delta > 0$ τέτοιο ώστε $|x-y| \geq \delta\ \forall x \in U, \forall y \in \partial\Omega$.
Απόδειξη:
(Άσκηση)

Κάποιοι χώροι συναρτήσεων
$C^k(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C}$ ή $\mathbb{R}$: οι μερικές παράγωγοι k τάξης υπάρχουν και είναι συνεχείς$\}$
$C^\infty(\Omega) = \bigcap_k C^k(\Omega)$
$C_c^\infty(\Omega)$ ή $C_0^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : supp(u) \subset\subset \Omega\}$, όπου $supp(u) = \overline{\{x : u(x) \neq 0\}}$

Παρατήρηση: Αν $u \in C_c^\infty(\Omega)$, η u μηδενίζεται σε μια περιοχή του $\partial\Omega$

$L^p(\Omega) \qquad \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p} \qquad 1 \leq p < \infty$
$L^\infty(\Omega) \qquad \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \underset{x\in\Omega}{\text{esssup}}\, |u(x)| = \inf\{M > 0 : |u(x)| \leq M$ σχεδόν παντού$\}$

Ορισμός: $L^p_{loc}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{C}$ ή $\mathbb{R} : u \in L^p(U)\ \forall$ ανοικτό $U \subset\subset \Omega\}$

Άρα $L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$
πχ $\quad C(\mathbb{R}) \subset L^p_{loc}(\mathbb{R}) \quad \forall p \in [1, \infty]$

Παρατήρηση: Ισχύει ότι ο $L^q_{loc}(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega)$ αν $1 \leq p \leq q \leq \infty$,
διότι αν $|U| < \infty$ τότε $L^q(U) \subset L^p(U)$
μέτρο Lebesgue

Ανισότητα Höler

Αν $1 \leq p, q \leq \infty$ και $1/r = 1/p + 1/q$ τότε $u \in L^p(U)$, $v \in L^q(U) \Rightarrow$
$u \cdot v \in L^r(U)$ και $\|uv\|_{L^r} \leq \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$

Έστω $u \in L^q(U)$ και $1 \leq p < q$ τότε $u = \underset{L^q}{\underset{\frown}{u}} \; \underset{L^s}{\underset{\frown}{1}}$ $\qquad 1/p = 1/q + 1/s$

πρεπει $1/s = 1/p - 1/q \Rightarrow s = \frac{pq}{q-p} > 0$

Αρα $u \in L^p$ και $\|u\|_p \leq |U| \|u\|_q$

Μάθημα 17ο ΕΦΜ 6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 17/4/2018

Πρόταση: (i) Ο $C_c(\Omega)$ είναι πυκνός στον $L^p(\Omega)$ $1 \le p < \infty$
(ii) Έστω $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ Αν $\int_\Omega f\varphi \, dx = 0$ $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ τότε $f = 0$

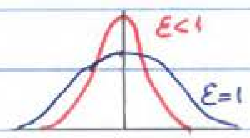
Ομαλοποιητές

Συμβολισμός: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα χωρίο (ανοιχτό και συνεκτικό) Για $\varepsilon > 0$ ορίζουμε:
$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : dist(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$
$\Omega^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(x, \Omega) < \varepsilon\}$ $\qquad \Omega_\varepsilon \subset \Omega \subset \Omega^\varepsilon$

ορίζουμε $\rho(x) = \begin{cases} c \cdot e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \ge 1 \end{cases}$

όπου $c > 0$ τέτοιο ώστε $\int_{|x|<1} \rho(x) = 1$
Τότε $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

Άσκηση: Έστω $r(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t}} & 0 < t < 1 \\ 0 & t \ge 1 \end{cases}$ τότε $r \in C^\infty(0, \infty)$



Για $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $\rho_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \rho(x/\varepsilon)$
τότε
(i) $supp(\rho_\varepsilon) = \bar{B}(0, \varepsilon)$
(ii) $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon \, dx = 1$
(iii) $\rho_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
Οι συναρτήσεις (ρ_ε) ονομάζονται ομαλοποιητές.

Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ Για $\varepsilon > 0$ και $x \in \Omega_\varepsilon$ ορίζουμε
$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y) u(y) \, dy = \int_{|y-x|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-y) u(y) \, dy = \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) u(x-y) \, dy$

Ισοδύναμα, επεκτείνοντας την u στο $\mathbb{R}^n$ θέτοντας $u = 0$ στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$
$u_\varepsilon = u * \rho_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u$.

Ανισότητα Young

Αν $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$ και $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ $(1 \le p, q, r \le \infty)$ τότε $u * v \in L^r(\mathbb{R}^n)$ και $\|u*v\|_{L^r} \le \|u\|_{L^p} \|v\|_{L^q}$

Πόρισμα: Αν $u \in L^p(\Omega)$ τότε $u_\varepsilon \in L^p(\Omega_\varepsilon)$ και $\|u_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)}$

"Ιδέα" $\rho_\varepsilon \to \delta$ άρα $u_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u \to \delta u = u$

Συμβολισμός: Έστω $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_n)$ $\alpha_k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (πολυδείκτης)

Γράφουμε $D^\alpha u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u$

Πρόταση. Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$

(i) $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$

(ii) αν $u \in C(\Omega)$ τότε $u_\varepsilon \to u$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω

(iii) αν $u \in L^p(\Omega)$ τότε $\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \to 0$. Ειδικότερα $u_\varepsilon \to u$ στο $L^p(U)$ $\forall U \subset\subset \Omega$

Απόδειξη.

$$u_\varepsilon(x) = \int_{|y-x|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-y) u(y)\, dy \qquad x \in \Omega_\varepsilon$$

(i) Έστω $x \in \Omega_\varepsilon$ θα δείξω ότι $\frac{\partial u_\varepsilon(x)}{\partial x_k} = \int_{|y-x|<\varepsilon} \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_k}(x-y) u(y)\, dy$

Άρα πρέπει να δείξουμε ότι $A(\delta) = \frac{u_\varepsilon(x+\delta e_k) - u_\varepsilon(x)}{\delta} - \int_{|y-x|<\varepsilon} \frac{\partial \rho_\varepsilon(x-y)}{\partial x_k} u(y)\, dy \to 0$

έχουμε ότι

$$A(\delta) = \frac{1}{\delta}\left[\int_{|y-x|<\varepsilon} u(y) \left[\rho_\varepsilon(x+\delta e_k - y) - \rho_\varepsilon(x-y) - \delta \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_k}(x-y)\right] dy \right]$$

Από το τύπο Taylor έχουμε ότι για κάθε $y \in B(x, \varepsilon)$ ότι

$\rho_\varepsilon(x-y+\delta e_k) = \rho_\varepsilon(x-y) + \delta \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_k}(x-y) + \frac{1}{2}\delta^2 \mathrm{Hess}(\rho_\varepsilon)(\xi_y) e_k \cdot e_k$ για κάποιο

$\xi_y = \xi_y(\delta) \in [x-y, x-y+\delta e_k]$

Έστω $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|\mathrm{Hess}(\rho_\varepsilon)(x)\| < M$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$

Τότε $|A(\delta)| \le \frac{1}{\delta} \int_{|y-x|<\varepsilon} \left| u(y) \frac{1}{2} \delta^2 \mathrm{Hess}(\rho_\varepsilon)(\xi_n) e_k \cdot e_k \right| dy \le \frac{\delta M}{2} \int_{|y-x|<\varepsilon} |u(y)|\, dy \xrightarrow{\delta \to 0} 0$

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 17/4/2018

Γενικεύοντας $(D^\alpha u_\varepsilon)(x) = \int_{|y-x|<\varepsilon} (D^\alpha \rho_\varepsilon)(x-y)u(y)\,dy$

Άρα $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$

(ii) Έστω $U \subset\subset \Omega$. Έστω $\eta < dist(U, \partial\Omega)$ τότε $U^\eta \subset\subset \Omega$ έπεται ότι η u είναι ομοιόμορφα συνεχής στο U^η

Έστω $\delta > 0$ τότε $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ τέτοιο ώστε αν $x, x' \in U^\eta$ και $|x-x'| < \varepsilon_0$, τότε $|u(x) - u(x')| < \delta$. Έστω τώρα $\varepsilon < \varepsilon_0$ και $x \in U$ τότε

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| = \left|\int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)[u(x-y) - u(x)]\,dy\right| \le \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)|u(x-y) - u(x)|\,dy$$

$x-y \in U^\varepsilon \subset U^\eta$, $x \in U \subset U^\eta$

$$\le \sup_{\substack{x,x' \in U^\eta \\ |x-x'|<\varepsilon}} |u(x') - u(x)| \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)\,dy}_{1} \le \delta$$

Άρα δείξαμε ότι $u_\varepsilon \to u$ ομοιόμορφα στο U

(iii) $\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \to 0$. Έστω $\delta > 0$. Έστω $v \in C_c(\Omega)$ τέτοιο ώστε $\|v - u\|_{L^p(\Omega)} < \delta/3$. Έστω $K = supp(v)$. Έστω $\eta < dist(K, \partial\Omega)$. Άρα $K^\eta \subset\subset \Omega$ τότε $v_\varepsilon \to v$ ομοιόμορφα στο K^η. Επεκτείνουμε την $v_\varepsilon = 0$ στο $\Omega \setminus \Omega_\varepsilon$

Έστω $\varepsilon < \eta$ τότε $supp(v_\varepsilon) \subset K^\eta$

$$v_\varepsilon(x) = \int_{|y-x|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(x-y)v(y)\,dy$$

Άρα $\|v_\varepsilon - v\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} = \|v_\varepsilon - v\|_{L^p(K^\eta)}\ \left(\int_{K^\eta} |v_\varepsilon - v|^p\,dx\right)^{1/p} \le \|v_\varepsilon - v\|_{L^\infty(K^\eta)} |K^\eta|^{1/p} < \delta/3$

Για αρκετά μικρά $\varepsilon > 0$

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \le \|u_\varepsilon - v_\varepsilon\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} + \|v_\varepsilon - v\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} + \|v - u\|_{L^p(\Omega_\varepsilon)} \le \underbrace{\|u - v\|_{L^p(\Omega)}}_{\le \delta/3} + \delta/3 + \delta/3 = \delta$$

Μάθημα 18ο ΕΦΜΓ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 19/4/2018

Βιβλιογραφία
- Evans : "Partial Differential Equations"
- Brezis: "Functional Analysis, Sobolev spaces and PDEs"
- Leoni : "A first course in Sobolev spaces"

Πρόταση: Κάθε ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία είναι φραγμένη

16 Έστω K συμπαγής τελεστής. Να δειχθεί ότι αν $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ $\forall y \in \mathcal{H}$ τότε $Kx_n \to Kx$

Λύση:

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας $x=0$

Έστω ότι $Kx_n \not\to 0$, τότε $\exists$ $\varepsilon>0$ και υπακολουθία (x_{n_k}) ώστε $\|Kx_{n_k}\| \geq \varepsilon$ $\forall$ $k=1,2,\ldots$ Υπάρχει τότε $(x_{n_{k_j}})$ και $z \in \mathcal{H}$ ώστε $Kx_{n_{k_j}} \to z$. Τότε $\|z\| \geq \varepsilon$

Τότε $\langle x_{n_{k_j}}, K^* z\rangle \longrightarrow 0$

$$\langle Kx_{n_{k_j}}, z\rangle \longrightarrow \langle z, z\rangle \neq 0 \qquad \text{Άτοπο}$$

17 Έστω $\mathcal{H}$ απειροδιάστατος διαχωρίσιμος χώρος Hilbert. Να εξεταστεί αν είναι αληθείς οι παρακάτω προτάσεις:

(i) αν $A^n = I$ για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ τότε ο A δεν είναι συμπαγής

(ii) αν $A \cdot B = 0$ τότε ένας τουλάχιστον από τους A, B είναι συμπαγής.

(iii) αν T_n συμπαγής, $n \in \mathbb{N}$, και $T_n x \to Tx$ για κάθε $x \in \mathcal{H}$, τότε T συμπαγής.

Λύση:

(i) $A^n = I \Rightarrow A$ δεν είναι συμπαγής. Ο I δεν είναι συμπαγής και ξέρουμε ότι γινόμενο συμπαγούς με φραγμένο είναι συμπαγής $\Rightarrow$ A δεν είναι συμπαγής

(ii) Έστω M, N απειροδιάστατοι υπόχωροι κάθετοι μεταξύ τους. Και έστω P, Q οι ορθογώνιες προβολές τους. Τότε $P \cdot Q = 0$ και P, Q μη συμπαγείς

(iii) Έστω P_n η ορθογώνια προβολή στον $M_n = \text{lin}\langle e_1, \ldots, e_n\rangle$ (άρα $P_n x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle e_k$)
Τότε P_n συμπαγής $\forall$ $n \in \mathbb{N}$. Ισχύει $P_n x \to x$ $\forall$ $x \in \mathcal{H}$ και I μη συμπαγής.

(18) Έστω A συμπαγής αυτοσυζυγής τελεστής και $x_0 \in H$. Θεωρείστε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$(*) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = Ax & t>0 \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Αφού ορίσετε πότε μια συνάρτηση $x: [0,+\infty) \to H$ είναι λύση του προβλήματος αρχικών τιμών, αποδείξτε την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης.

Λύση:

Ορισμός: Η $x: [0,+\infty) \to H$ είναι λύση του $(*)$ αν:

(i) $\forall \; t \geq 0$ υπάρχει το $x'(t) = \lim_{\delta \to 0} \frac{x(t+\delta)-x(t)}{\delta}$

(ii) $x(0) = x_0$

(iii) $x'(t) = Ax(t) \quad \forall \; t \geq 0$

$\exists \; (\varphi_n)$ ορθοκανονική βάση $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n \otimes \varphi_n$$

Ορίζουμε $x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle x_0, \varphi_n \rangle \varphi_n$ Προφανώς $x(0) = x_0$

Θα δείξουμε ότι $\forall \; t \geq 0 \quad \frac{x(t+\delta)-x(t)}{\delta} - Ax(t) \xrightarrow{\delta \to 0} 0$

Έχουμε $y(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[e^{\lambda_n (t+\delta)} - \lambda_n e^{\lambda_n t} \langle x_0, \varphi_n \rangle \varphi_n \right]$

$$A\left(\sum_n x_n \varphi_n\right) = \sum_n \lambda_n x_n \varphi_n$$

Άρα $\|y(\delta)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{e^{\lambda_n(t+\delta)} - e^{\lambda_n t}}{\delta} - \lambda_n e^{\lambda_n t} \right|^2 |\langle x_0, \varphi_n \rangle|^2$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n t} \left| \frac{e^{\lambda_n \delta} - 1}{\delta} - \lambda_n \right|^2 |\langle x_0, \varphi_n \rangle|^2$$

Ισχύει ότι $\left| \frac{e^{s-1}}{s} - 1 \right| \leq 2|s| \quad \forall \; |s| < 1/2$

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 19/4/2018

Έστω $|\delta| < \frac{1}{2\|A\|}$ τότε $|\lambda_n \delta| < \|A\| |\delta| \leq 1/2$

Άρα $\left| \frac{e^{\lambda_n \delta} - 1}{\delta} - \lambda_n \right| = |\lambda_n| \left| \frac{e^{\lambda_n \delta} - 1}{\lambda_n \delta} - 1 \right| \leq |\lambda_n| \, 2 |\lambda_n| \, |\delta| \leq 2 \|A\|^2 |\delta|$

Άρα $\|y(\delta)\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} e^{2\lambda_n t} 4\|A\|^4 \delta^2 |\langle x_0, \varphi_n \rangle|^2 \leq 4\|A\|^4 \delta^2 e^{2\|A\|t} \|x_0\|^2 \xrightarrow{\delta \to 0} 0$

Ορίσαμε $x(t) = T_t x_0$ όπου $T_t = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \varphi_n \otimes \varphi_n$ ισχύουν τα εξής

(i) $T_{t+s} = T_t \cdot T_s$

(ii) $T_0 = I$

Η οικογένεια $(T_t)_{t \geq 0}$ είναι μια ημιομάδα τελεστών. Γράφουμε συχνά $T_t = e^{At}$

Μοναδικότητα

Έστω $y(t)$ μια ακόμα λύση του ⊛. Έστω $t > 0$ θέτουμε $z(s) = T_{t-s} y(s)$

τότε $z'(s) = -A\, T_{t-s}\, y(s) + T_{t-s}\, y'(s) = -A \cdot T_{t-s}\, y(s) + T_{t-s} A\, y(s) = 0$

Άρα $z(s) =$ σταθερά

Άρα $y(t) = T_0\, y(t) = z(t) = z(0) = T_t (y_0) = T_t x_0 = x(t)$

Μάθημα 19ο ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 24/4/2018

Ασθενείς Παράγωγοι.

Ορισμός: Μια συνάρτηση $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ λέγεται ασθενώς παραγωγίσιμη αν υπάρχουν συναρτήσεις $g_1, g_2, \dots, g_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ τέτοιες ώστε:

$\int_\Omega u \varphi_{x_i} dx = -\int_\Omega g_i \varphi \, dx \quad \forall i=1,\dots,n \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ (φ_{x_i} = μερική παράγωγος της φ ως προς x_i)

Η g_i ονομάζεται ασθενής μερική παράγωγος της u ως προς x_i και συμβολίζεται με u_{x_i}

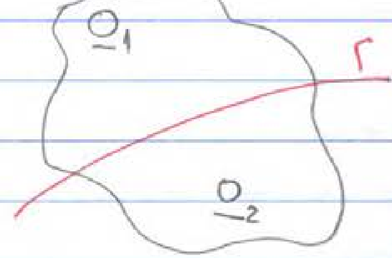
Παρατηρήσεις:

1. Αν $u \in C^1(\Omega)$, τότε είναι ασθενώς παραγωγίσιμη και οι ασθενείς μερικές παράγωγοι συμπίπτουν με τις κλασσικές
2. Οι ασθενείς παράγωγοι, αν υπάρχουν είναι μοναδικές. Αν υπήρχαν g_i, g_i^* τότε $\int_\Omega g_i \varphi \, dx = \int_\Omega g_i^* \varphi \, dx \ \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, άρα $g_i = g_i^*$
3. Αν η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο Ω και $U \subset \Omega$ ανοιχτό τότε η $u|_U$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη και $(u|_U)_{x_i} = u_{x_i}|_U$
Αυτό το βλέπουμε θεωρώντας $\varphi \in C_c^\infty(U) \subset C_c^\infty(\Omega)$
4. Ειδικότερα αν μια $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη και $u \in C^1(U)$ τότε οι ασθενείς και κλασσικές παράγωγοι συμπίπτουν στο U.
Αυτό συχνά μας προσδιορίζει τις "υποψήφιες" μερικές (ασθενείς) παραγώγους, όταν θέλουμε να δείξουμε ότι μια συνάρτηση είναι ασθενώς παραγωγίσιμη.

Άσκηση: Έστω ότι το Ω χωρίζεται σε δύο υποσύνολα Ω_1, Ω_2, από μια λεία επιφάνεια Γ

Έστω $u_i \in C^1(\Omega_i) \cap C(\Omega_i \cup \Gamma) \quad i=1,2$

Έστω $v(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1 \\ u_2(x), & x \in \Omega_2 \end{cases}$



Να δειχθεί ότι η v είναι ασθενώς παραγωγίσιμη αν και μόνο αν $u_1 = u_2$ στη Γ

Παράδειγμα. Να δειχθεί ότι η $u(x) = 1+|x|$, $x\in\mathbb{R}$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη, ενώ η $v(x) = \begin{cases} 1+x, & x<0 \\ 2-x, & x>1 \end{cases}$ δεν είναι

Λύση: Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$ είναι η ασθενής παράγωγος της u.

Έστω $\varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} u\varphi' dx = \int_{-\infty}^{0} (1-x)\varphi'(x) dx + \int_{0}^{\infty} (1+x)\varphi'(x) dx =$$

$$= -\int_{-\infty}^{0} (1-x)'\varphi(x) dx + \left[(1-x)\varphi(x)\right]_{-\infty}^{0} - \int_{-\infty}^{0} (1+x)'\varphi(x) dx + \left[(1+x)\varphi(x)\right]_{0}^{\infty}$$

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x) dx + \varphi(0) - \varphi(0) = \int_{-\infty} g\varphi dx$$

Έστω ότι η v είναι ασθενώς παραγωγίσιμη τότε η ασθενής παράγωγος θα είναι η $g(x) = \begin{cases} 1, & x<0 \\ -1, & x>0 \end{cases}$

Τότε $\int_{-\infty}^{\infty} v\varphi' dx = \dots = -\int_{-\infty}^{\infty} g\varphi dx + A\varphi(0)$, $A\neq 0$

Ορισμός: Έστω $1\le p\le\infty$ ορίζουμε $W^{1,p}(\Omega) = \{u\in L^p(\Omega)$: οι ασθενείς παράγωγοι u_{x_i} υπάρχουν και ανήκουν στον $L^p(\Omega)\}$

Για $u\in W^{1,p}(\Omega)$ ορίζουμε $\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \|u_{x_1}\|_{L^p} + \dots + \|u_{x_n}\|_{L^p}$

Παρατήρηση: Ο $W^{1,p}(\Omega)$ είναι διανυσματικός χώρος και η $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ είναι νόρμα.

Πρόταση: Ο $W^{1,p}(\Omega)$ είναι χώρος Banach.

Απόδειξη:

Έστω (u_k) ακολουθία Cauchy. Τότε οι (u_k) και (u_{k,x_i}) είναι Cauchy στον $L^p(\Omega)$, άρα συγκλίνουν.

Έστω $u = \lim_k u_k$ και $v_i = \lim_k (u_k)_{x_i}$. Αρκεί να δείξουμε ότι οι v_i είναι οι ασθενείς παράγωγοι της u.

Έστω $\varphi\in C_c^\infty(\Omega)$ τότε $\forall k\in\mathbb{N}$ $\int_\Omega u_k\varphi_{x_i} dx = -\int_\Omega (u_k)_{x_i}\varphi dx$. Παίρνουμε $k\to\infty$ και έχουμε

$\int_\Omega u\varphi_{x_i} dx = -\int_\Omega v_i\varphi dx$ $\qquad (L^p)^* = L^{p/p-1} \supset C_c^\infty(\Omega)$

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 24/4/2018

Πρόταση: (Ανισότητα Poincaré)
Έστω $1 \leq p < \infty$ και $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο. Υπάρχει $C > 0$ τέτοιο ώστε:
$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$

Ορισμός: Συμβολίζουμε με $W_0^{1,p}(\Omega)$ την κλειστή θήκη στο $W^{1,p}(\Omega)$ του $C_c^\infty(\Omega)$

Απόδειξη πρότασης:
Αρκεί να δειχθεί $\forall u \in C_c^\infty(\Omega)$. Έστω $\alpha > 0$ ώστε $|x_1| < \alpha \ \forall x \in \Omega$
Έστω $u \in C_c^\infty(\Omega)$. Έστω $x \in \Omega$ τότε $|u(x)| = \left|\int_{-\infty}^{x_1} u_{x_1}(t, x_2, \ldots, x_n)\, dt\right|$
$\leq \int_{-\alpha}^{\alpha} |\nabla u(t, x_2, \ldots, x_n)|\, dt \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} dt\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} |\nabla u(t, x_2, \ldots, x_n)|^p\right)^{1/p}$
$= (2\alpha)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{-\alpha}^{\alpha} |\nabla u(t, x_2, \ldots, x_n)|^p dt\right)^{1/p}$ και άρα
$\int_{-\alpha}^{\alpha} |u(x)|^p dx_1 \leq (2\alpha)^p \int_{-\alpha}^{\alpha} |\nabla u(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^p dx_1 \Longrightarrow$

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^p dx}_{\int_\Omega |u(x)|^p dx} \leq (2\alpha)^p \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x)|^p dx}_{\int_\Omega |\nabla u(x)|^p dx}$$

Πρόταση (Ανισότητα Sobolev)
Έστω $1 \leq p < n$ και $p^* = \frac{np}{n-p}$ τότε
$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C(u,p) \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
$(u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow u \in W_0^{1,p}(\Omega) \ \forall \Omega)$
Απόδειξη:
Βήμα 1º $p = 1$.
Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ τότε $\forall i = 1, \ldots, n \quad |u(x)| \leq \int_{-\infty}^{\alpha} |\nabla u(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)|\, dy$

$\Rightarrow |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n)|\, dy_i\right)^{n/n-1} \Longrightarrow$ (ολοκληρώνω ως προς x_1)

$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(\ldots, y_i, \ldots)|\, dy_i\right)^{n/n-1} dx_1$

$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} \nabla u(y_1, \ldots)\, dy_1\right)^{n/n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(\ldots, y_i, \ldots)|\, dy_i\right)^{n/n-1}$

χρησιμοποιώ $\int |f_1 \dots f_{n-1}| dx \le \left(\int |f_1|^{n-1} dx\right)^{1/n-1} \dots \left(\int |f_{n-1}|^{n-1} dx\right)^{1/n-1}$

$$\le \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(y_1, \dots)| dy_1\right)^{1/n-1} \prod_{i=2}^{n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(\dots, y_i,)| dy_i\right)^{n} dx_1\right]^{1/n-1}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(y_1, \dots)| dy_1\right)^{1/n-1} \prod_{i=2}^{n} I_i^{1/n-1} \quad \text{όπου}$$

$$I_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(\dots, y_i, \dots)| dy_i dx_1$$

Συνέχεια στο επόμενο

Μάθημα 20º ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 26/4/2018

Συνέχεια απόδειξης

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{n/n-1}dx_1 \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dx_1\right)^{1/n-1}\prod_{i=2}^{n} I_i^{1/n-1}, \text{ όπου } I_i=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dx_1dy_i$$

Ολοκληρώνουμε ως προς x_2

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u|^{n/n-1}dx_1dx_2 \leq I_2^{1/n-1}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dx_1\right)^{1/n-1}\prod_{i=3}^{n} I_i^{1/n-1}dx_2$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} I_2^{1/n-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|\nabla u|dx_1dx_2\right)^{1/n-1}\prod_{i=3}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty}I_i\,dx_2\right)^{1/n-1}$$

$$= I_2^{2/n-1}\prod_{i=3}^{n}\left(\iiint|\nabla u|\,dx_1\,dx_2dy_i\right)^{1/n-1}$$

Συνεχίζοντας κατά αυτό το τρόπο προκύπτει το ζητούμενο

Βήμα 2º $1<p<n$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ότι $\nabla|u|^\gamma=\gamma\,|u|^{\gamma-2}\,u\nabla u$

Ορίζουμε $v=|u|^\gamma$ τότε $v\in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{n/n-1}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq c\int|\nabla v|dx \Leftrightarrow \left(\int_{\mathbb{R}^n}|v|^{\frac{n\gamma}{n-1}}dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq c\gamma\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\gamma-1}|\nabla u|dx$$

$$\leq c\cdot\gamma\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{\frac{(\gamma-1)p}{p-1}}dx\right)^{\frac{p-1}{\gamma}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p dx\right)^{1/p}$$

Επιλέγουμε το γ ώστε $\frac{(\gamma-1)^p}{p-1}=\frac{n\gamma}{\gamma-1}\longrightarrow \gamma=p(n-1)/(n-p)$

οπότε ο κοινός εκθέτης είναι p^*

Άρα $\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{n}{n-1}-\frac{p-1}{p}} \leq c\cdot\gamma\left(\int|\nabla u|^p dx\right)^{1/p}$

$1/p^*$

Άσκηση: Έστω u ασθενώς παραγωγίσιμη. Να δειχθεί ότι αν $\psi \in C^\infty(\Omega)$ τότε η $u\psi$ είναι παραγωγίσιμη και $(u\psi)_{x_i} = u_{x_i}\psi + u\psi_{x_i}$

Παρατήρηση: Δεν ισχύει όμως γενικά ότι u, v ασθενώς παραγωγίσιμες $\Rightarrow$ $u \cdot v$ ασθενώς παραγωγίσιμη
($u, v \in L^1_{loc} \not\Rightarrow uv \in L^1_{loc}$)

Άσκηση: Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$ και $u(x) = |x|^\alpha$, $x \in B(1) = \{x : |x| < 1\}$. Να εξεταστεί:
(i) για ποιά $\alpha \in \mathbb{R}$ η u είναι C^1
(ii) για ποιά $\alpha \in \mathbb{R}$ η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη
(iii) για ποιά $\alpha \in \mathbb{R}$ η $u \in W^{1,p}(B(1))$ $(1 \leq p \leq \infty)$

Άσκηση: Έστω ότι το Ω χωρίζεται σε δύο υποσύνολα Ω_1, Ω_2 από μια λεία επιφάνεια Γ. Έστω $u_i \in C^1(\Omega_i) \cap C(\Omega_i \cup \Gamma)$ $i = 1,2$

Έστω $v(x) = \begin{cases} u_1(x) &, x \in \Omega_1 \\ u_2(x) &, x \in \Omega_2 \end{cases}$

Να δειχθεί ότι η v είναι ασθενώς παραγωγίσιμη αν και μόνο αν $u_1 = u_2$ στο Γ

Λύση:

($\Leftarrow$) Θα δείξω ότι η $v_k(x) = \begin{cases} (u_1)_{x_k} &, x \in \Omega_1 \\ (u_2)_{x_k} &, x \in \Omega_2 \end{cases}$

Είναι η ασθενής μερική παράγωγος ως προς x_k της u

Έστω $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ τότε $\int_\Omega u \varphi_{x_k} dx = \int_{\Omega_1} u_1 \varphi_{x_k} dx + \int_{\Omega_2} u_2 \varphi_{x_k} dx$ $\circledast$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα Απόκλισης: Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο με C^1 σύνορο και $\vec{T}$ ένα διανυσματικό πεδίο $\vec{T} \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ τότε

$\int_\Omega \operatorname{div} \vec{T} dx = \int_{\partial\Omega} \vec{T} \vec{n} ds$ $\longrightarrow$ εξωτερικό μοναδιαίο κάθετο

Από αυτό προκύπτει: $\int_\Omega u v_{x_i} dx = -\int_\Omega u_{x_i} v dx + \int_{\partial\Omega} u v n_i ds$, $u, v \in C^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$

$\circledast = -\int_{\Omega_1} (u_1)_{x_k} \varphi dx + \int_\Gamma u_1 \varphi n_k ds - \int_{\Omega_2} (u_2)_{x_k} \varphi dx - \int_\Gamma u_2 \varphi n_k ds$

$= -\int_\Omega v_k \varphi dx + \int_\Gamma (\cancel{u_1 - u_2}) \varphi n_k ds = -\int_\Omega v_k \varphi dx$. Άρα η u ασθενώς παραγωγίσιμη και $u_{x_k} = v_k$

ΕΦΜ 6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 26/04/2018

($\Longrightarrow$) Έστω ότι η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη τότε

$\int_\Gamma (u_1-u_2)\varphi\, ds = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

Έπεται ότι $u_1 = u_2$ στο Γ

Έστω αντίθετα ότι $\exists\, x_0 \in \Gamma$ τέτοιο ώστε $u_1(x_0) > u_2(x_0)$ τότε $\exists\, \delta > 0$ τέτοιο ώστε $u_1 > u_2$ στην $B(x_0, \delta)$

Έστω $\varphi_0 = \rho\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right) \in C_c^\infty(\Omega)$ τότε $\int_\Omega (u_1-u_2)\varphi_0\, dx > 0$ Άτοπο.

Άσκηση: Να δειχθεί ότι $\nexists\, q \neq p^*$ τέτοιο ώστε $\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \le c \cdot \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

$u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

Υπόδειξη: Θεωρώ $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$

Πρόταση: Ισχύει $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Απόδειξη:

Βήμα 1ο: Ο $W_c^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Έστω λοιπόν $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ Παίρνουμε $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$$g(t) = \begin{cases} 1, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 2 \end{cases} \qquad g \in C^\infty(\mathbb{R})$$

Ορίζουμε $\psi_n(x) = g\left(\frac{|x|}{n}\right) = \begin{cases} 1, & |x| < n \\ 0, & |x| > 2n \end{cases}$

Θέτουμε $u_n = u \cdot \psi_n$ τότε $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_n - u|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p (1-\psi_n)^p dx = \int_{|x|>n} |u|^p \cdot (1-\psi_n)^p dx \le \int_{|x|>n} |u|^p dx \longrightarrow 0$$

Επίσης $$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_n - \nabla u|^p dx\right)^{1/p} = \left(\int_{|x|>n} |\psi_n \nabla u + u \nabla \psi_n - \nabla u|^p dx\right)^{1/p}$$

$$\le \left(\int_{|x|>n} \cancelto{0}{|\nabla u|^p (1-\psi_n)^p}\, dx\right)^{1/p} + \left(\int_{|x|>n} \cancelto{0}{|u|^p |\nabla \psi_n|^p}\, dx\right)^{1/p}$$

$$|\nabla \psi_n(x)| = \left|\nabla\left(g\left(\frac{|x|}{n}\right)\right)\right| \le \|g'\|_{L^\infty} \cdot \frac{1}{n}$$

Συνέχεια στο επόμενο μάθημα.

Μάθημα 21º ΕΦΜ 6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 3/5/2018

(Συνέχεια Απόδειξης)

Βήμα 2º $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ πυκνό στο $W_c^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Άσκηση: Έστω u ασθενώς παραγωγίσιμη στο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ τότε $(u_\varepsilon)_{x_n} = (u_{x_n})_\varepsilon$, $x \in \Omega_\varepsilon$

Έστω $u \in W_c^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Έστω u_ε οι αντίστοιχες ομαλοποιημένες συναρτήσεις, οι οποίες ορίζονται στο $(\mathbb{R}^n)_\varepsilon = \mathbb{R}^n$. Τότε $u_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Από ιδιότητες των ομαλοποιητών έχουμε: $\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \longrightarrow 0$

Επίσης $\|(u_\varepsilon)_{x_n} - u_{x_n}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \|(u_{x_n})_\varepsilon - u_{x_n}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$

Άρα $u_\varepsilon \longrightarrow u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Ίχνος

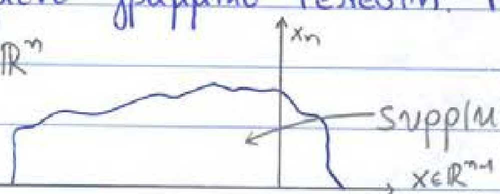
$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$

Πρόταση: Η απεικόνιση του περιορισμού στο $\partial\mathbb{R}^n_+$ μιας συνάρτησης $u \in C_c^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ επεκτείνεται σε ένα φραγμένο γραμμικό τελεστή $Tr : W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \longrightarrow L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)$

Απόδειξη:

Βήμα 1º

Έστω $u \in C_c^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$



supp(u) συμπαγές υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}^n_+}$

Έστω $x = (x', x_n)$ τότε $|u(x', x_n)|^p = |u(x',0)|^p + \int_0^{x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} |u(x',t)|^p \, dt$

$= |u(x',0)|^p + p\int_0^{x_n} |u|^{p-2} u \frac{\partial u}{\partial x_n} dt$ Παίρνουμε όριο $x_n \longrightarrow +\infty$ και έχουμε

$$|u(x',0)| = p \left| \int_0^{+\infty} |u|^{p-2} u \, u_{x_n} \, dt \right| \leq p \int_0^\infty |u|^{p-1} |\nabla u| \, dt$$

Άρα $\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} |u(x',0)|^p dx \leq p \int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^{p-1} |\nabla u| dx \leq p \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^p dx\right)^{1/p}$

από ανισότητα Young $\left(|\alpha \cdot b| \leq \frac{p-1}{p} |\alpha|^{p/p-1} + 1/p \, |b|^p\right)$

$\leq p \left(\frac{p-1}{p} \int_{\mathbb{R}^n_+} |u|^p dx + \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n_+} |\nabla u|^p dx \right) \leq C \, \|u\|^p_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}$

Άρα δείξαμε ότι για $u \in C_c^1(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ $\|u\|_{L^p(\partial\mathbb{R}^n_+)} \leq C \cdot \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)}$

Βήμα 2ο Έστω $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$. Επεκτείνουμε την u σε μια συνάρτηση v στο $\mathbb{R}^n$ ώστε $v(x', x_n) = v(x', -x_n)$ (άρτια επέκταση). Τότε $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$
Τότε υπάρχει ακολουθία $(v_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$: $v_n \longrightarrow v$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$
Έστω $u_n = v_n|_{\mathbb{R}^n_+}$ τότε $u_n \in C_c^1(\mathbb{R}^n_+)$ και $u_n \to u_n \to u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$
Άρα ο $C_c^1(\mathbb{R}^n_+)$ είναι πυκνός στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ και το ζητούμενο έπεται από το Βήμα 1

Παρατήρηση: Παρόμοια πρόταση ισχύει αν αντί του $\mathbb{R}^n_+$ έχουμε ένα χωρίο $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ με ομαλό σύνορο.

Πρόταση. (i) Έστω $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ ισχύει ότι η $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \Leftrightarrow Tr(u) = 0$
(ii) Έστω $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \cap C(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ τότε $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+) \Leftrightarrow u = 0$
Απόδειξη:
(i) ($\Longrightarrow$) Έστω $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$ Έστω $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n_+)$ με $u_n \longrightarrow u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n_+)$
τότε $Tr(u) = \lim_{L^p(\mathbb{R}^n_+)} Tr(u_n) = 0$
($\Longleftarrow$) Παραλείπεται
(ii) Άμεσο από (i)

Λήμμα: Για κάθε $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει $\| u_\varepsilon - u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \| \nabla u \|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$
Απόδειξη:
Βήμα 1 Υποθέτουμε ότι $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ τότε $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| = \Big| \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \underbrace{[u(x-y) - u(x)]}_{\nabla u(x-ty)\cdot(-y)} dy \Big| \leq \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) |u(x-y) - u(x)| dy =$$

$$= \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \Big| \int_0^1 \Big[\frac{d}{dt} u(x-ty)\Big] dt \Big| dy \overset{\text{κανόνας αλυσίδας}}{\leq} \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 |\nabla u(x-ty)| |y| \, dt \, dy \leq$$

$$\leq \varepsilon \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 |\nabla u(x-ty)| dt \, dy$$

$$\text{Άρα } \int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p dx \leq \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \Big\{ \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 |\nabla u(x-ty)| dt \, dy \Big\}^p dx$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\leq} \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \Big\{ \Big(\underbrace{\int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) dy}_{1} \Big)^{\frac{p-1}{p}} \Big(\int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \Big[\int_0^1 |\nabla u(x-ty)| dt \Big]^p dy \, dy \Big)^{1/p} \Big\}^p dx$$

$$= \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \Big[\int_0^1 |\nabla u(x-ty)| dt \Big]^p dy \, dx \overset{\text{Hölder}}{\leq} \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 |\nabla u(x-ty)|^p dt \, dy \, dx$$

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 3/5/2018

$$= \varepsilon^p \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x-ty)|^p \, dx\, dt\, dy = \varepsilon^p \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 dt\, dy = \varepsilon^p \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

Βήμα 2 Έστω $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ Έστω $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

Έστω $(u_n) \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ τέτοιο ώστε $u_n \to u$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Τότε $\forall n \in \mathbb{N}$ $\|u_{n,\varepsilon} - u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \|\nabla u_n\|_{L^p}$

Παίρνουμε όριο $n \to \infty$ τότε

$\nabla u_n \to \nabla u$ στον $L^p(\mathbb{R}^n)$

$u_n \to u$ στον $L^p(\mathbb{R}^n)$

Αρκεί να δείξουμε ότι $u_{n,\varepsilon} \to u_\varepsilon$ στον $L^p(\mathbb{R}^n)$

Έχουμε δει ότι $\|v_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

Άρα $\|(u_n - u)_\varepsilon\| = \|u_{n,\varepsilon} - u_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_n - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$

Άρα αποδείχθει.

Άσκηση: Να δειχθεί ότι $\nexists\, q \neq p^* = \frac{np}{n-p}$ τέτοιο ώστε να ισχύει.

$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$, $\forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$

Λύση:

Έστω ότι $\exists$ τέτοιο q

(Από υπόθεση) Έστω $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ Για $\lambda > 0$ ορίζουμε $u_\lambda(x) = u(\lambda x)$, $x \in \mathbb{R}^n$

Τότε $u_\lambda \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ άρα $\|u_\lambda\|_{L^q} \leq C \|\nabla u_\lambda\|_{L^p}$

Έχουμε $\|u_\lambda\|^q_{L^q} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(\lambda x)|^q dx$ (Κάνω αλλαγή μεταβλητής $y = \lambda x$, $x = \lambda^{-1} y$, $dx = \lambda^{-n} dy$)

$= \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} |u(y)|^q dy$

Άρα $\|u_\lambda\|_{L^q} = \lambda^{-n/q} \|u\|_{L^q}$

Επίσης $\|\nabla u_\lambda\|^p_{L^p} = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_\lambda|^p dx =$ $(u_\lambda(x) = u(\lambda x) \to \nabla u_\lambda(x) = \lambda (\nabla(u)(\lambda x)))$

$= \lambda^p \int |\nabla u(\lambda x)|^p dx = \lambda^{p-n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^p dy$

Άρα $\|\nabla u_\lambda\|_{L^p} = \lambda^{1-n/p} \|\nabla u\|_{L^p}$

Άρα $\forall \lambda > 0$ έχουμε $\lambda^{-n/q} \|u\|_{L^q} \leq C \lambda^{1-n/q} \|\nabla u\|_{L^p} \Rightarrow \|u\|_{L^q} \leq C \lambda^{1+\frac{n}{q}+\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p}$

Άρα Αν $1 + \frac{n}{q} + \frac{n}{p} \neq 0$ Φτάνουμε σε άτοπο παίρνοντας όριο $\lambda \to 0^+$ ή $\lambda \to \infty$

(Εξαρτάται από το αν $\lambda > 0$ ή $\lambda < 0$)

Άρα πρέπει $1 + \frac{n}{q} - \frac{n}{p} = 0 \Rightarrow \frac{n}{q} = \frac{n-p}{p} \Rightarrow q = \frac{n \cdot p}{n-p} = p^*$

Μάθημα 22ο ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 8/5/2018

Θεώρημα Συμπαγούς Εμβάπτισης του Reillich

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο. Η εμβάπτιση του $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη:

Έστω $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ φραγμένη. Επεκτείνουμε την u_n στο $\mathbb{R}^n$ να είναι ίση με μηδέν τότε $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$

Ισχυρισμός: Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει υπακολουθία (u_{n_k}) τέτοια ώστε $\|u_{n_k} - u_{n_\ell}\|_{L^1(\Omega)} \leq \delta$

Απόδειξη Ισχυρισμού:

Έστω $(u_{n,\varepsilon})$ οι ομαλοποιημένες (u_n) δηλαδή $u_{n,\varepsilon} = \rho_\varepsilon * u_n$

Τότε το $supp(u_{n,\varepsilon}) \subset \overline{\Omega}^\varepsilon \subset\subset \mathbb{R}^n$ Τότε από το λήμμα

$\|u_{n,\varepsilon} - u_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon \cdot \|\Delta u_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Άρα $\exists\, \varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $\|u_{n,\varepsilon} - u_n\|_{L^1(\Omega)} < \delta/3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Αφού το Ω είναι φραγμένο τότε η (u_n) είναι φραγμένη στον $L^1(\Omega)$

Άρα $\|u_{n,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\rho_\varepsilon * u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq c \cdot \varepsilon^{-n}$

Επίσης ↑ Ανισότητα Young

$\|(u_{n,\varepsilon})_{x_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\rho_{\varepsilon_{x_k}} * u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\rho_{\varepsilon, x_k}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \cdot \varepsilon^{-n-1}$

Έπεται ότι η ακολουθία $(u_{n,\varepsilon})$ (για σταθερό $\varepsilon > 0$) είναι ισοσυνεχής στο συμπαγές σύνολο $\overline{\Omega}^\varepsilon$ δηλαδή

(i) $\|u_{n,\varepsilon}\|_{L^\infty} \leq C = C(\varepsilon)$

(ii) $\forall\, \eta > 0\ \exists\, \zeta > 0$ τέτοιο ώστε αν $x, y \in \overline{\Omega}^\varepsilon$ τότε

$|x-y| < \zeta \implies \|u_{n,\varepsilon}(x) - u_{n,\varepsilon}(y)\| < \eta \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$

Από το Θεώρημα Arzela-Ascoli έπεται ότι υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_k,\varepsilon}) \subset (u_{n,\varepsilon})$ που συγκλίνει ομοιόμορφα (δηλαδή στον $L^\infty(\overline{\Omega}^\varepsilon)$). Άρα και στον $L^p(\Omega)$, άρα είναι Cauchy

άρα $\exists\, k_0 = k_0(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε $k, \ell > k_0 \implies \|u_{n_k,\varepsilon} - u_{n_\ell,\varepsilon}\|_{L^1(\Omega)} < \delta/3$

Άρα υπάρχει $(u_{n_{k_i},\varepsilon})$ τέτοιο ώστε $\|u_{n_{k_i},\varepsilon} - u_{n_{k_j},\varepsilon}\|_{L^1(\Omega)} < \delta/3 \quad \forall\, i,j$

Άρα $\forall\, i,j \in \mathbb{N}$ $\|u_{n_{k_i}} - u_{n_{k_j}}\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_{n_{k_i}} - u_{n_{k_i},\varepsilon}\|_{L^p} + \|u_{n_{k_i},\varepsilon} - u_{n_{k_j},\varepsilon}\|_{L^p} + \|u_{n_{k_j},\varepsilon} - u_{n_{k_j}}\|_{L^p} < \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta.$

Εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό διαδοχικά για $\delta = 1/m$

- Για $m = 1$ Υπάρχει $(u_{1,k}) \subset (u_k)$ τέτοια ώστε $\|u_{1,k} - u_{1,\ell}\|_{L^1(\Omega)} < 1 \quad \forall\, k, \ell$
- Για $m = 2$ Υπάρχει υπακολουθία $(u_{2,k})$ της $(u_{1,k})$ τέτοια ώστε $\|u_{2,k} - u_{2,\ell}\|_{L^1(\Omega)} < 1/2 \quad \forall\, k, \ell.$

και ούτο καθεξής.

Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζεται ακολουθία $(u_{i,k})_k$ ώστε

(i) $(u_{i,k})_k \subset (u_{i-1,k})_k$

(ii) $\|u_{i,k} - u_{i,\ell}\|_{L^p(\Omega)} < 1/i \quad \forall\, k,\ell$

Έστω $i,j \in \mathbb{N}$ με $i>j$. Έστω $k,\ell \in \mathbb{N}$, τότε $\exists\, m \in \mathbb{N}$ τετοιο ώστε $u_{i,k} = u_{j,m}$

άρα $\|u_{i,k} - u_{j,\ell}\|_{L^p} = \|u_{j,m} - u_{j,\ell}\|_{L^p} < 1/j$

Έστω $v_k = u_{k,k}$ Έστω $\ell, k \in \mathbb{N}$, $\ell \geq k$ τότε:

$\|v_\ell - v_k\|_{L^p} = \|u_{\ell\ell} - u_{k,k}\| \leq 1/k$ και άρα η (v_k) είναι Cauchy στον $L^p(\Omega)$

22 Έστω $u(x) = |x|^\alpha$, $x \in B(1) = \{x : |x| < 1\}$. Να βρεθεί για ποιά $\alpha \in \mathbb{R}$ η u:

(i) είναι C^1 στη $B(1)$

(ii) Είναι ασθενώς παραγωγίσιμη

(iii) Ανήκει στο $W^{1,p}(B(1))$, όπου $p \geq 1$

Λύση:

Η u είναι C^∞ στο $B(1)\setminus\{0\}$ με $(\nabla u)(x) = \alpha |x|^{\alpha-2} x$

(i) Λόγω συμμετρίας το $(\nabla u)(0)$ αν υπάρχει θα είναι 0.

Ισχύει $\forall\, x \neq 0$

$|\nabla u(x)| = \alpha \cdot |x|^{\alpha-1} \xrightarrow{x\to 0} 0$ αν και μόνο $\alpha > 1$

Θα δείξω ότι αν $\alpha > 1$ τότε u παραγωγίσιμη στο 0 και $(\nabla u)(0) = 0$

πρέπει να δείξω $\dfrac{u(x) - u(0) - (\nabla u)(0)\, x}{|x|} \longrightarrow 0$

$$\frac{|u(x) - 0 - 0|}{|x|} \longrightarrow 0 \iff |x|^{\alpha-1} \longrightarrow 0 \text{ που ισχύει}$$

Άρα είναι C^1 αν και μόνο αν $\alpha > 1$

(ii) Για $\alpha > 1$ είναι ασθενής παραγωγίσιμη αφού C^1

Αν η u είναι ασθενής παραγωγίσιμη, τότε $(\nabla u)(x) = \alpha |x|^{\alpha-2} x$

πρέπει η $u, \nabla u \in L^1_{loc}(B(1)) \iff |x|^\alpha, \alpha|x|^{\alpha-1} \in L^1_{loc}(B(1)) \iff |x|^{\alpha-1} \in L^1(B(1))$

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 8/5/2018

Έχουμε $\int_{B(1)} |x|^{\alpha-1} dx = C_n \int_0^1 r^{\alpha-1} r^{n-1} dr = C_n \int_0^1 r^{n+\alpha-2}$ $r=|x|$

$\int_0^1 \int_{|x|} |x|^{\alpha-1} ds dr$

$\Rightarrow$ Πεπερασμένο $\Leftrightarrow n+\alpha-2 > -1 \Leftrightarrow \alpha > 1-n$

Έστω $\varphi \in C_c^\infty(B(1))$. Έστω $\varepsilon > 0$ τότε:

$$\int_{|x|>\varepsilon} u \cdot \varphi_{x_i} dx - \int_{|x|>\varepsilon} |x|^\alpha \varphi_{x_i} dx = -\int_{|x|>\varepsilon} \alpha \cdot |x|^{\alpha-2} x_i \cdot \varphi(x) dx + \int_{|x|=\varepsilon} |x|^\alpha \varphi \eta_i ds$$

Έχουμε $\left| \int_{|x|=\varepsilon} |x|^\alpha \varphi \eta_i ds \right| = \left| \varepsilon^\alpha \int_{|x|=\varepsilon} \varphi \cdot \eta_i ds \right| \leq \varepsilon^\alpha \max|\varphi| \cdot C_n \varepsilon^{n-1} \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \alpha > 1-n$

Παίρνοντας $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε

$\int_{B(1)} u \varphi_{x_i} dx = -\int_{B(1)} \alpha |x|^{\alpha-2} x_i \varphi dx$. Δηλαδή η u ασθενώς παραγωγίσιμη αν και μόνο αν $\alpha > 1-n$.

(iii) Πρέπει $u \in L^p(B(1))$ και $|\nabla u| \in L^p(B(1))$. Δηλαδή

$|x|^\alpha \in L^p$ και $\alpha |x|^{\alpha-1} \in L^p(B(1))$ δηλαδή $|x|^{\alpha-1} \in L^p(B(1))$

Έχουμε $\int_{B(1)} |x|^{(\alpha-1)p} dx = C_n \int_0^1 r^{(\alpha-1)p} r^{n-1} dr < \infty \Leftrightarrow (\alpha-1) \cdot p + n - 1 > -1$

$\Leftrightarrow (\alpha-1) \cdot p > -n \Leftrightarrow \alpha - 1 > \frac{-n}{p} \Leftrightarrow \alpha > \frac{p-n}{p}$

Μάθημα 23ο ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 10/5/2018

Προβλήματα Συνοριακών Τιμών – Ασθενείς Λύσεις

Θα μελετήσουμε το πρόβλημα: $(*)\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} = f(x), & x \in \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$
($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, φραγμένο)

Σημείωση: Αν $a_{ij}(x) = \delta_{ij}$ τότε έχουμε $-\Delta u = f$

Συμβολισμός: $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$

Υποθέσεις: (i) $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ και $\exists\ \lambda, \Lambda > 0$ σταθερές τέτοιες ώστε
$\lambda |\xi|^2 \le \sum a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \le \Lambda |\xi|^2 \quad \forall x \in \Omega, \forall \xi \in \mathbb{R}^n$
(ii) $f \in L^2(\Omega)$
(iii) $g \in H^1(\Omega)$

Ορισμός: Μια συνάρτηση $u \in H^1(\Omega)$ ονομάζεται ασθενής λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών $(*)$.
Αν $u - g \in H_0^1(\Omega)$ και $(\circledast)\ \int \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} \varphi_{x_j}\, dx = \int_\Omega f \varphi\, dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

Παρατηρήσεις:
① Είναι εύκολο να δει κανείς ότι αν οι $a_{ij}, f, g, \partial\Omega$ είναι αρκετά ομαλά, τότε κάθε κλασσική λύση είναι και ασθενής λύση.
② Μια διαφορική έκφραση όπως η $Tu = \sum_{i,j} (a_{ij} u_{x_i})_{x_j}$ λέμε ότι δίνεται σε μορφή απόκλισης, διότι με $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ έχουμε $Tu = \operatorname{div}(A(x) \nabla u)$
③ Στην $(\circledast)$ θα μπορούσαμε να έχουμε ισοδύναμα $\overline{\varphi}$ αντί για φ

Θεώρημα: Το πρόβλημα συνοριακών τιμών $(*)$ έχει μοναδική ασθενή λύση $u \in H^1(\Omega)$ η οποία επιπλέον εξαρτάται κατά συνεχή τρόπο από τις f, g

Απόδειξη:
Ο $H^1(\Omega)$ είναι χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο το $\langle u, v \rangle_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (u\overline{v} + \nabla u \nabla \overline{v})\, dx$
στον $H^1(\Omega)$ ορίζουμε την 3/2 - γραμμική μορφή:
$A(v, w) = \int_\Omega \sum_{i,j}^{n} a_{ij} v_{x_i} \overline{w}_{x_j}\, dx$ στον $H_0^1(\Omega)$ ισχύει τότε

(i) $A(v,w) = \overline{A(w,v)}$

(ii) $|A(v,w)| \leq \int_\Omega \left|\sum a_{ij}(x) v_{x_i} \bar{w}_{x_j}\right| dx \leq \int_\Omega \Lambda |\nabla v| |\nabla w| dx \leq \Lambda \|\nabla v\|_{L^2} \|\nabla w\|_{L^2} \leq \Lambda \|v\|_{H^1} \|w\|_{H^1}$

$\Longrightarrow$ Αφραγμένη

(iii) $A(v,v) = \int_\Omega \sum a_{ij} v_{x_i} \bar{v}_{x_j} \geq \int_\Omega \lambda |\nabla v|^2 dx = \lambda \|\nabla v\|_{L^2}^2 \geq C \cdot \lambda \|v\|_{H_0^1}^2$

$\Longrightarrow$ A ελλειπτική στον $H_0^1(\Omega)$

Άρα το ζητούμενο είναι η ύπαρξη και μοναδικότητα, $u \in H^1(\Omega)$ τέτοια ώστε:

$$\begin{cases} A(u,\varphi) = \langle f, \varphi \rangle & \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \\ u - g \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

Θέτουμε $u-g=v$ οπότε ζητάμε ύπαρξη και μοναδικότητα για $v \in H_0^1(\Omega)$ τέτοια ώστε

$A(v+g,\varphi) = \langle f,\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \Longleftrightarrow A(v,\varphi) = \langle f,\varphi \rangle - A(g,\varphi) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow A(\varphi,v) = \langle \varphi, f \rangle - A(\varphi,g) \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ⊛

Παρατήρηση: Η ⊛ και η ⊛ ισχύει $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ αν και μόνο αν ισχύει $\forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

Θέτουμε $\Pi(\varphi) = \langle \varphi, f \rangle - A(\varphi, g)$, $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Το Π είναι γραμμικό. Επίσης

$|\Pi(\varphi)| \leq |\langle \varphi, f \rangle| + |A(\varphi,g)| \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} + C\|\varphi\|_{H^1} \|g\|_{H^1} \leq (\|f\|_{L^2} + C\|g\|_{H^1})\|\varphi\|_{H^1} \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)$

Δηλαδή το Π είναι φραγμένο στον $H_0^1(\Omega)$

Από το Θεώρημα Lax-Milgram έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα $v \in H_0^1(\Omega)$ τέτοιο ώστε:

$A(\varphi, v) = \Pi(\varphi) \quad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega) \Longrightarrow$ ύπαρξη και μοναδικότητα ασθενούς λύσης του ⊛

Τέλος η εξάρτηση της u από τις f, g είναι συνεχής αφού

$\|v\|_{H^1} \leq C\|\Pi\| \leq C(\|H\|_{L^2(\Omega)} + C\|g\|_{H^1(\Omega)})$ και $u = v+g$.

Μάθημα 24ο ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 15/5/2018

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό συνεκτικό και φραγμένο και έστω το πρόβλημα συνοριακών συνθηκών

$$(*)\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{m} (\alpha_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} = f & x \in \Omega \\ u = 0 & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

$A(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{m} \alpha_{ij} u_{x_i} \overline{v}_j \, dx \qquad u,v \in H_0^1(\Omega),\ f \in L^2(\Omega)$

$u \in H_0^1(\Omega)$ ασθενής λύση του $(*) \Leftrightarrow A(u,\varphi) = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) \ (\Leftrightarrow \varphi \in H_0^1(\Omega))$

Θέλουμε να γράψουμε το $(*)$ ως $Lu = f$ για κάποιον τελεστή L στον $L^2(\Omega)$

Ερώτημα: Πως θα οριστεί ο L;

Ορίζουμε $D(L) = \{u \in H_0^1(\Omega) : \exists f \in L^2(\Omega)$ τέτοια ώστε $A(u,\varphi) = \langle f, \varphi \rangle \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega)\}$

Για $u \in D(L)$ θέτουμε $Lu = f$

Παρατηρήσεις

(1) Αν η $u \in D(L)$ τότε η f είναι μοναδική και άρα ο L είναι καλά ορισμένος

(2) Έχουμε δει ότι: $|A(u,\varphi)| \leq \Lambda \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2} \leq \Lambda \|u\|_{H_0^1} \|\varphi\|_{H_0^1} \quad \forall u,\varphi \in H_0^1(\Omega)$

Αν επιπλέον $u \in D(L)$ και $Lu = f$ τότε $|A(u,\varphi)| = |\langle f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{L^2} \|\varphi\|_{L^2}$

έπεται ότι έχουμε:

$D(L) = \{u \in H_0^1(\Omega) : \varphi \longrightarrow A(\varphi, u),\ H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$, φραγμένη ως προς την L^2 νόρμα της $\varphi\}$.

(3) Ισχύει $A(u,\varphi) = \langle Lu, \varphi \rangle \quad \forall u \in D(L) \quad \varphi \in H_0^1(\Omega)$

Άσκηση: Αν $(u_n), (\varphi_n) \subset H^1(\Omega)$ και $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ και $u_n \longrightarrow u$ στον $H^1(\Omega)$ τότε $A(u_n, \varphi_n) \longrightarrow A(u,\varphi)$

Παρατήρηση: Αν $n = 1$ τότε η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, αν και μόνο αν u απόλυτα συνεχής σε κάθε κλειστό διάστημα, και οι δύο παράγωγοι συμπίπτουν.

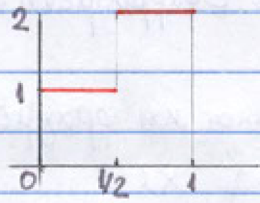
Εξίσωση Θερμότητας στο $[0,1]$

$u_t = (p(x) \cdot u_x)_x$ όπου $p(x)$ η θερμική αγωγιμότητα

(μορφή απόκλισης)

Θεωρούμε τμηματικά σταθερή αγωγιμότητα

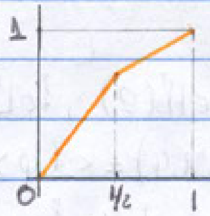
$$p(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1/2\\ 2, & 1/2<x<1\end{cases}$$



Θεωρούμε μια κατάσταση ισορροπίας

$u(x,t)=u(x)$

$u(0)=0\,,\ u(1)=1$



Η $u(x)$ είναι τότε λύση της $(p(x)u_x)_x=0 \iff p(x)u_x=C_1 \iff u_x=\frac{C_1}{p(x)}$

$u(x)=C_1\int_0^x \frac{dx}{p(x)} \longrightarrow$ απόλυτα συνεχής

Η u_x είναι ασυνεχής. Η $p(x)u_x$ είναι συνεχής (σταθερή).

Πρόταση: Ο $L: D(L)\longrightarrow L^2(\Omega)$ είναι 1-1 και επί, και ο αντίστροφος τελεστής είναι φραγμένος από τον $L^2(\Omega)$ στον $H^1_0(\Omega)$

Απόδειξη:

Το ότι ο L είναι 1-1 και επί έπεται από την ύπαρξη και μοναδικότητα ασθενούς λύσης για το αντίστοιχο πρόβλημα συνοριακών τιμών.

$A(u,\varphi)=\langle Lu,\varphi\rangle$.

$A(L^{-1}f,\varphi)=\langle f,\varphi\rangle$. Έστω $f\in L^2(\Omega)$ και $u=L^{-1}f$, τότε $\forall \varphi\in H^1_0(\Omega)$ έχουμε $\langle f,\varphi\rangle=A(u,\varphi)$

για $\varphi=u$ αυτό δίνει:

$$\lambda\|\nabla u\|^2_{L^2}\le A(u,u)=\langle f,u\rangle \le \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2} \overset{Poin}{\le} C\|f\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \Longrightarrow$$

$$C_1\|u\|_{H^1_0}\le \|\nabla u\|_{L^2}\le C/\lambda\,\|f\|_{L^2}$$

Πρόταση: Ο $L^{-1}: L^2(\Omega)\longrightarrow L^2(\Omega)$, Ω φραγμένος, είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής

Απόδειξη:

Έστω $f,g\in L^2(\Omega)$ τότε

$$\langle L^{-1}f,g\rangle=\langle L^{-1}f, LL^{-1}g\rangle=\overline{\langle \underbrace{LL^{-1}g}_{\in D(L)}, \underbrace{L^{-1}f}_{\in H^1_0(\Omega)}\rangle}$$

$$=\overline{A(L^{-1}g,L^{-1}f)}=A(\underbrace{L^{-1}f}_{\in D(L)},\underbrace{L^{-1}g}_{\in H^1})=\langle LL^{-1}f, L^{-1}g\rangle=\langle f, L^{-1}g\rangle$$ άρα L^{-1} αυτοσυζυγής.

ΕΦΜ 6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 15/5/2018

Έστω $(f_k) \subset L^2(\Omega)$ φραγμένη. Έστω $u_k = L^{-1} f_k$ τότε
$\|u_k\|_{H^1} \le C \, \|f_k\|_{L^2} \le C$

Άρα η (u_k) είναι μια φραγμένη ακολουθία στον $H_0^1(\Omega)$

Από το θεώρημα συμπάγιας του Reillich έπεται ότι η (u_k) έχει υπακολουθία που συγκλίνει στον $L^2(\Omega)$. Άρα L^{-1} συμπαγής

Θεώρημα: Υπάρχει μια ορθοκανονική βάση (φ_k) του $L^2(\Omega)$, η οποία αποτελείται από ιδιοσυναρτήσεις του L (Ω φραγμένο). Επιπλέον:
(1) για τις αντίστοιχες ιδιοτιμές (λ_k) έχουμε ότι είναι θετικές, έχουν πεπερασμένη πολλαπλότητα και $\lambda_k \longrightarrow \infty$
(2) Το $D(L)$ είναι γνήσιος πυκνός υπόχωρος του $L^2(\Omega)$

Απόδειξη:
Εφαρμόζουμε το φασματικό θεώρημα στον L^{-1} και παίρνουμε ότι υπάρχει μια ορθοκανονική βάση (φ_k) του $L^2(\Omega)$ με
(α) $L^{-1}\varphi_k = \mu_k \varphi_k$ ισχύει ότι $\mu_k \neq 0 \ \forall k$
Η (α) δίνει $\varphi_k = \mu_k \cdot L \cdot \varphi_k \Longrightarrow L\cdot\varphi_k = \frac{1}{\mu_k}\cdot\varphi_k = \lambda_k \varphi_k$
Ισχύει $0 < A(\varphi_k,\varphi_k) = \langle L\varphi_k, \varphi_k\rangle = \lambda_k$
Οι άλλες ιδιότητες των (λ_k) έπονται από αντίστοιχες ιδιότητες των (μ_k)

Ισχύει $D(L) \subset H_0^1(\Omega) \subsetneq L^2(\Omega)$
Το $D(L)$ είναι πυκνό αφού περιέχει μια ορθοκανονική βάση.

Άσκηση: Να δειχθεί ότι $D(L) = \{u \in L^2(\Omega) : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 |\langle u, \varphi_k\rangle|^2 < +\infty\}$ και για $u \in D(L)$ έχουμε: $Lu = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle u, \varphi_k\rangle \varphi_k$

(19) Έστω $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ασθενώς παραγωγίσιμη και $\psi \in C_c^\infty$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $u\psi$ είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο Ω και ισχύει ο γνωστός τύπος για την παράγωγο γινομένου

Λύση:
Αρκεί να δείξω ότι η $u_{x_k}\psi + u\psi_{x_k}$ είναι η k-ασθενής παράγωγος της u.

Έστω $\varphi \in C_c^\infty(\underline{\Omega})$ τότε θέλαμε

$\int_{\underline{\Omega}} u \cdot \psi \varphi_{x_n} dx = -\int_{\underline{\Omega}} (u_{x_n}\psi + u\psi_{x_n})\varphi dx$

Η $\varphi \cdot \psi$ είναι $C_c^\infty(\underline{\Omega})$, άρα

$$\int_{\underline{\Omega}} u(\varphi\psi)_{x_n} dx = -\int u_{x_n}\varphi\psi$$

$$\int u\psi\varphi_{x_n} dx + \int u\psi_{x_n} \cdot \varphi dx$$

Μάθημα 25ο ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 17/5/2018

$L : D(L) \to L^2(\Omega)$

$L \cdot \varphi_n = \lambda \cdot \varphi_n$

Πρόταση: Ισχύει $D(L) = \{u \in L^2(\Omega) : \sum_n \lambda_n |\langle u, \varphi_n \rangle|^2 < +\infty\}$ και για $u \in D(L)$
$Lu = \sum_n \lambda_n \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n$

Απόδειξη.

"$\subseteq$" Έστω $u \in D(L)$ Τότε $u = L^{-1} f$ για κάποια $f \in L^2(\Omega)$ Έχουμε τότε
$f = \sum_n \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n \Rightarrow u = L^{-1} f = \sum_n \underbrace{\lambda_n^{-1} \langle f, \varphi_n \rangle}_{\langle u, \varphi_n \rangle} \varphi_n$

Άρα $\sum_n \lambda_n^2 |\langle u, \varphi_n \rangle|^2 = \sum_n |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 < +\infty$

"$\supseteq$" Έστω ότι $\sum \lambda_n^2 |\langle u, \varphi_n \rangle|^2 < +\infty$. Ορίζεται τότε η $f = \sum_n \lambda_n \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n$
$L^{-1} f = \sum_n \langle u, \varphi_n \rangle \varphi_n = u$

Το παραβολικό πρόβλημα

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο $u(t,x)$, $t > 0$ $x \in \Omega$

$$(\circledast)\begin{cases} u_t = \sum_{i,j=1}^{n} (\alpha_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} \\ u(t,x) = 0 \quad t > 0, x \in \partial\Omega \\ u(0,x) = v(x) \quad , v \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

Σκεφτόμαστε $u(t,x)$ ως $u(t)(x)$ όπου $u : \mathbb{R}^+ \to L^2(\Omega)$, δηλαδή $u(t) \in L^2(\Omega) \ \forall t>0$

Ορισμός: Ονομάζουμε (ασθενή λύση) του $\circledast$ μια συνάρτηση
$u : \mathbb{R}^+ = (0, +\infty) \to L^2(\Omega)$ τέτοια ώστε:

$$\text{"}\begin{cases} u_t(t) = -Lu(t) \\ u(0) = v \end{cases}\text{"}$$ που σημαίνει ότι

(i) $u(t)$ παραγωγίσιμη σε κάθε $t > 0$

(ii) $u(t) \in D(L) \quad \forall t > 0$

(iii) $u_t(t) = -L\cdot u(t) \quad \forall\, t>0$

(iv) $u(t) \xrightarrow{L^2(\Omega)} v$ καθώς $t \longrightarrow 0^+$

Παρατήρηση: Έστω $A \in \mathcal{B}(H)$ το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X(t) = A x(t) \\ X(0) = y \end{cases}$$, έχει μοναδική λύση $X(t) = T_t y$, όπου: $T_t = e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots$

Πρόταση: Για κάθε $v \in L^2(\Omega)$ το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{cases} u_t = -Lu & t>0 \\ u(0) = v \end{cases}$$

Έχει μοναδική λύση, η οποία είναι $u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \langle v, \varphi_n\rangle \varphi_n = T_t v \quad t>0$.

Απόδειξη:

(ii) Αρκεί να δείξω ότι $\sum_n \lambda_n^2 |\langle u(t), \varphi_n\rangle|^2 < +\infty \quad \forall\, t>0$

Έχουμε $\sum_n \lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t} |\langle v, \varphi_n\rangle|^2$

έχουμε $0 \leq \lambda_n^2 \cdot e^{-2\lambda_n t} = \frac{1}{t^2}(\lambda_n t)^2 e^{-2\lambda_n t} = \frac{1}{t} g(\lambda_n t)$

όπου $g(x) = x^2 e^{-2x} \longrightarrow$ φραγμένη στο $[0,+\infty)$ και άρα $\lambda_n \cdot e^{-2\lambda_n t} \leq C/t^2$ (άρα φραγμένη). Επομένως αν συνεχίσουμε

$$\leq C/t^2 \sum_n |\langle v, \varphi_n\rangle|^2 = \frac{c}{t}\|v\|^2$$ Άρα $u(t) \in D(L) \quad \forall\, t>0$

(i)(iii) Αρκεί να δείξω ότι $\forall\, t>0$ έχουμε (Έστω $|\delta| < t/2$)

$$\frac{u(t+\delta) - u(t)}{\delta} + Lu(t) \xrightarrow[\delta\to 0]{L^2(\Omega)} 0$$

έχουμε $$\left\|\frac{u(t+\delta)}{\delta} + L\,u(t)\right\|^2 = \sum_n \left|\frac{e^{-\lambda_n(t+\delta)} - e^{-\lambda_n t}}{\delta} + \lambda_n e^{-\lambda_n t}\right|^2 |\langle v, \varphi_n\rangle|^2$$

$$= \sum_n e^{-2\lambda_n t}\left(\frac{e^{-\lambda_n\delta}-1}{\delta} + \lambda_n\right)^2 |\langle v, \varphi_n\rangle|^2$$

Βοηθητική Ανισότητα $\left|\frac{e^x-1}{x} - 1\right| \leq 2|x| \quad \forall\, x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$$= \sum_{\lambda_n < \frac{1}{2|\delta|}} + \sum_{\lambda_n \geq 1/2|\delta|} = \Sigma' + \Sigma''$$

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 17/5/2018

Έστω $\varepsilon>0$. Έχουμε

$$\Sigma'' \leq 2\Sigma'' e^{-2\lambda_n t}\left(\frac{e^{-2\lambda_n\delta}}{\delta^2}+\frac{1}{\delta^2}+\lambda_n\right)^2 |\langle v,\varphi_n\rangle|^2 \leq 2\Sigma'' e^{-2\lambda_n t}\left[e^{\lambda_n t}\cdot 4\lambda_n^2+5\lambda_n^2\right]|\langle v,\varphi_n\rangle|^2$$

$$=8\Sigma'' e^{-\lambda_n t}\lambda_n^4|\langle v,\varphi_n\rangle|^2+10\Sigma'' e^{-2\lambda_n t}\lambda_n^2|\langle v,\varphi_n\rangle|^2$$

[$e^{-x}x^4$ φραγμένη, $e^{-2x}x^2$ φραγμένη]

$$\leq C\frac{1}{t^4}\Sigma'|\langle v,\varphi_n\rangle|^2+C\frac{1}{t^2}\Sigma'|\langle v,\varphi_n\rangle|^2=C\left(\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t^4}\right)\sum_{\lambda_n\geq 1/2|\delta|}|\langle v,\varphi_n\rangle|<\varepsilon/2$$

για μικρά $|\delta|$, $|\delta|<\delta_0(\varepsilon,t)$

Επίσης $\Sigma'=\sum_{\lambda_n<\frac{1}{2|\delta|}} e^{-2\lambda_n t}\left(\frac{e^{-\lambda_n\delta}-1}{\delta}+\lambda_n\right)^2|\langle v,\varphi_n\rangle|^2=\sum_{\lambda_n<\frac{1}{2|\delta|}}\lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t}\left(\frac{e^{-\lambda_n\delta}-1}{\lambda_n\delta}+1\right)^2|\langle v,\varphi_n\rangle|^2$

$$\overset{\text{βοηθητική ανισ.}}{\leq}\sum_{\lambda_n<\frac{1}{2|\delta|}}\lambda_n^2 e^{-2\lambda_n t}\,4\delta^2\lambda_n^2|\langle v,\varphi_n\rangle|^2\leq 4\delta^2\sum_n\lambda_n^4 e^{-2\lambda_n t}|\langle v,\varphi_n\rangle|^2$$

$$\leq\frac{C\delta^2}{t^4}\sum_n|\langle v,\varphi_n\rangle|^2=\frac{C\delta^2}{t^4}\|v\|^2\leq\varepsilon/2 \quad \text{για } |\delta| \text{ μικρό.}$$

(iv) απλό

Μοναδικότητα: Έχουμε βρει τη λύση $u(t)=T_t v$. Έστω $\hat{u}(t)$ μια ακόμα λύση.
Έστω $t>0$ ορίζουμε $w(s)=T_{t-s}\hat{u}(s)$, τότε w παραγωγίσιμη
($\frac{d}{dt}T_t v=-LT_t v$)

$w'(s)=LT_{t-s}\hat{u}(s)+T_{t-s}\hat{u}'(s)=LT_{t-s}\hat{u}(s)-T_{t-s}L\hat{u}(s)=0$. άρα $LT_t=T_tL$

Άρα $w(s)$ σταθερή άρα

$$u(t)=T_t v=\lim_{s\to 0^+}w(s)=\lim_{s\to t^-}w(s)=\hat{u}(t)$$

Ξέρουμε ότι $T_t v\to v$ $t\to 0^+$, τότε

$\|w(s)-T_t v\|=\|T_{t-s}\hat{u}(s)-T_t v\|=\|T_{t-s}(\hat{u}(s)-T_s v)\|\leq\|\hat{u}(s)-T_s v\|\leq$

$\|T_t\|\leq 1\ \forall t>0$ $\qquad \leq\|\hat{u}(s)-v\|+\|v-T_s v\|\xrightarrow[s\to 0^+]{}0$

$T_t\cdot T_s=T_{t+s}$

Μάθημα 26ο ΕΦΜ 6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 22/5/2018

(21) Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό των ομαλοποιητών όπως στη θεωρία, αποδείξτε ότι αν η u είναι ασθενώς παραγωγίσιμη στο $\underline{\Omega}$ τότε $(u_\varepsilon)_{x_k} = (u_{x_k})_\varepsilon$ στο $\underline{\Omega}_\varepsilon$

Λύση:

Έστω $x \in \underline{\Omega}_\varepsilon$ τότε $(u_\varepsilon)_{x_k} = \int_{\underline{\Omega}} \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_k}(x-y)\,u(y)\,dy \overset{\rho_\varepsilon(y)=\rho_\varepsilon(x-y)}{=\!=} -\int_{\underline{\Omega}} \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_k}(y)\,u(y)\,dy$

$= \int \rho_\varepsilon(y)\,u_{x_k}(y)\,dy = \int_{\underline{\Omega}} \rho_\varepsilon(x-y)\,u_{x_k}(y)\,dy = (u_{x_k})_\varepsilon$

(24) Έστω $\underline{\Omega}$ χωρίο στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \underline{\Omega}$. Να αποδειχθεί ότι αν $1 \le p < n$, τότε $W_0^{1,p}(\underline{\Omega}) = W_0^{1,p}(\underline{\Omega} \setminus \{0\})$.

Λύση:

Πρόταση: $\underline{\Omega}_1 \subseteq \underline{\Omega}_2$ τότε $W_0^{1,p}(\underline{\Omega}_1) \subseteq W_0^{1,p}(\underline{\Omega}_2)$

Απόδειξη

Έστω $u \in W_0^{1,p}(\underline{\Omega}_1)$ και $\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & , x \in \underline{\Omega}_1 \\ 0 & x \in \underline{\Omega}_2 \setminus \underline{\Omega}_1 \end{cases}$ Θα δείξω ότι:

$\bar{u} \in W_0^{1,p}(\underline{\Omega}_2)$. Έστω $(u_n) \subset C_c^\infty(\underline{\Omega}_1)$: $u_n \to u$ στον $W_0^{1,p}(\underline{\Omega}_1)$ τότε ορίζουμε $\bar{u}_n = \begin{cases} u_n & x \in \underline{\Omega}_1 \\ 0 & x \in \underline{\Omega}_2 \setminus \underline{\Omega}_1 \end{cases}$ τότε $\bar{u}_n \in C_c^\infty(\underline{\Omega}_2)$ και $\bar{u}_n \to u$

τότε $\int_{\underline{\Omega}_2} \bar{u}_n u_{x_k} dx = -\int_{\underline{\Omega}_2} (\bar{u}_n)_{x_k} u\, dx \Rightarrow \int_{\underline{\Omega}_2} u_n \varphi_{x_k} dx = -\int_{\underline{\Omega}_1} (u_n)_{x_k} \varphi\, dx \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow}$

$\int_{\underline{\Omega}_1} u \varphi_{x_k} = -\int_{\underline{\Omega}_1} u_{x_k} u\, dx$ Άρα $\bar{u}$ ασθενώς παραγωγίσιμη με $\bar{u}_{x_k}(x) = \begin{cases} u_{x_k} & , x \in \underline{\Omega}_1 \\ 0 & x \in \underline{\Omega}_2 \setminus \underline{\Omega}_1 \end{cases}$

Άρα στην άσκηση αρκεί να δείξουμε ότι $W_0^{1,p}(\underline{\Omega}) \subseteq W_0^{1,p}(\underline{\Omega} \setminus \{0\})$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι η τυχαία $u \in C_c^\infty(\underline{\Omega})$ μπορεί να προσεγγιστεί στον $W^{1,p}(\underline{\Omega})$ από μια ακολουθία $(u_n) \subset C_c^\infty(\underline{\Omega} \setminus \{0\})$ που σημαίνει ότι $u_n = 0$ κοντά στο $x_0 = 0$.

Έστω $\psi(x) \in C^\infty$ τέτοια ώστε τέτοιο ώστε $\psi(x) = \begin{cases} 0 & |x| < 1 \\ 1 & |x| > 2 \end{cases}$

ορίζουμε $\psi_n(x) = \psi(nx) = \begin{cases} 0 & |x| < 1/n \\ 1 & |x| > 2/n \end{cases}$

Θα δείξω ότι $u_n \to u$ στον $W^{1,p}(\underline{\Omega})$

Έχουμε $\int_{\underline{\Omega}} |u_n(x) - u(x)|^p dx = \int_{\underline{\Omega}} |u(x)|^p\, |\psi_n(x) - 1|^p dx = \int_{|x|<2/n} |u(x)|^p\, |1 - \psi_n(x)|^p dx$

$$\leq \int_{|x|\geq 2/n} |u(x)|^p dx \xrightarrow{n} 0$$

Επίσης $\nabla u_n - \nabla u = \nabla(u\psi_n) - \nabla u = \psi_n \nabla u + u \nabla \psi_n - \nabla u$

Άρα $\| \nabla u_n - \nabla u \|_{L^p(\Omega)} \leq \| u \nabla \psi_n \|_{L^p} + \| \nabla u \|_{L^p} \overset{\to 0}{\| \psi_n - 1 \|_{L^p}}$

Έχουμε $\| u \nabla \psi_n \|^p_{L^p(\Omega)} = \int |u(x) \nabla \psi_n(x)|^p dx = \int_{|x|<2/n} |u(x) \nabla \psi_n(x)|^p dx =$

$$= \int_{|x|<2/n} |u(x) \nabla \psi(nx)|^p dx \leq n^p \max|u|^p \max|\nabla \psi|^p B(2/n) =$$

$$= n^p \max|u|^p \cdot \max|\nabla \psi|^p \, c\left(\frac{2}{n}\right)^N = C n^{p-N} \longrightarrow 0$$

Μάθημα 27º ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 29/5/2018

(25). Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ φραγμένο. Έστω $f, f_1, \dots, f_n \in L^2(\Omega)$, $\vec{F} = (f_1, \dots, f_n)$ και $g \in H^1(\Omega)$
Ορίστε κατάλληλα την έννοια της ασθενούς λύσης για το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{n} (\alpha_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} = f + \operatorname{div} \vec{F} & , x \in \Omega \\ u = g & , x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Στη συνέχεια αποδείξτε την ύπαρξη και μοναδικότητα λύσης.

Λύση:

Μια συνάρτηση $u \in H^1(\Omega)$ είναι λύση του ΠΣΤ αν $u - g \in H_0^1(\Omega)$ και
$\int \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} dx = \int_\Omega f \varphi dx - \int_\Omega \vec{F} \nabla\varphi dx$, $\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ ($\Leftrightarrow H_0^1(\Omega)$)
Ορίζουμε $\Pi : H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$: $\Pi(v) = \int_\Omega (v f - \nabla v \cdot \vec{F}) dx$. Το Π είναι φραγμένο στον H_0^1
κλπ.

Άσκηση: Έστω $u, v \in H$ ($u, v \neq 0$). Να βρεθεί το $\sigma(u \otimes v)$
($(u \otimes v)x = \langle x, u \rangle v$), $T = u \otimes v$
Παρατηρούμε ότι το $T \cdot v = \langle v, u \rangle v$ Άρα το $\langle v, u \rangle$ ιδιοτιμή
Επίσης $T \cdot x = 0$ $\forall x \in \langle u \rangle^\perp$. Θα δείξουμε ότι $\sigma(T) = \{0, \langle v, u \rangle\}$.
Έχουμε $T^2 x = \langle Tx, u \rangle v = \langle \langle x, u \rangle v, u \rangle \cdot v = \langle x, u \rangle \langle v, u \rangle v = \langle v, u \rangle Tx$
Άρα $T^2 = \langle v, u \rangle T$ (Όπως η άσκηση · Μάθημα 13 20/3/2018, $T^2 = 3 \cdot T$)

Άσκηση: Να δειχθεί ότι ο γραμμικός χώρος στον ℓ^2 που παράγεται από όλα τα στοιχεία της μορφής $(1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \dots)$, $\alpha \in D(1)$. Είναι πυκνός υπόχωρος του ℓ^2.
Έστω $x = (x_n) \in M^\perp$, τότε $x \cdot (1, \alpha, \alpha^2, \dots) = 0$ $\forall \alpha \in D(1)$
$x_1 + x_2 \bar{\alpha} + x_3 \bar{\alpha}^2 + x_4 \bar{\alpha}^3 + \dots = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} x_k z^k = 0$ $\forall |z| < 1$ (Θέσαμε $\bar{\alpha} = z$)
Μια δυναμοσειρά που συγκλίνει στον $D(1)$ $\rightsquigarrow$ αναλυτική συνάρτηση
Παίρνουμε $\alpha \longrightarrow 0$ $x_1 + \alpha(x_2 + \alpha x_3 + \dots) = 0$
Τότε $\alpha(x_2 + \alpha x_3 + \dots) = 0$.

Άσκηση: Στον $L^2(0,1)$. Έστω ο τελεστής Lotka – Volterra $(Vu)(x) = \int_0^x f(t)\, dt$.
Να βρεθεί η $\|V\|$
Υπόδειξη: Παρατηρείστε ότι αν $V^* V \varphi = \lambda \varphi$, $\lambda > 0$ τότε $\begin{cases} \varphi'' = \frac{1}{\lambda} \varphi \\ \varphi'(0) = \varphi(1) = 0 \end{cases}$

Λύση:

Βρίσκουμε τον V^*. Έστω $u,v \in L^2(0,1)$, τότε

$\langle Vu, v\rangle = \int_0^1 \int_0^x u(t)dt\ \overline{v(x)}\,dx = \int_0^1 \int_t^1 u(t)\ \overline{v(x)}\,dx\,dt = \int_0^1 u(t)\,\overline{\left[\int_t^1 v(x)dx\right]}\,dt$

Άρα $(V^*V)(t) = \int_t^1 v(s)ds$.

Άρα $(V^*V f)(x) = \int_x^1 (Vf)(t)dt = \int_x^1 \int_0^t f(s)\,ds\,dt$.

Έστω $V^*V\cdot \varphi = \lambda\varphi$ δηλαδή $\int_x^1 \int_0^t \varphi(s)\,ds\,dt = \lambda\varphi(x)$ $x \in (0,1)$

Θα δείξουμε ότι $V^*V = L^{-1}$

Να δειχθεί ότι $V^*V = L^{-1}$ $\quad \begin{cases} Lu = -u'' \\ u'(0) = u(1) = 0 \end{cases}$

Θα δείξουμε ότι $Ran(V^*V) \subset D(L)$

Έστω $g \in Ran(V^*V)$, $g = V^*V\cdot f$ τότε $g \in C^1$

και $g'(x) = -\int_0^x f(s)\,ds$ Άρα $g(1) = 0$, $g'(0) = 0$.

Η g' είναι απόλυτα συνεχής και $g''(x) = -f(x) \in L^2(0,1)$.

Άρα $g \in D(L)$ και $Lg = -g'' = f$

Άρα $L\cdot V^*V = I \longrightarrow$ Άρα $V^*V = L^{-1}$

Θα δείξω ότι $V^*V\,Lu = u$ $\forall u \in D(L)$

Έστω $u \in D(L)$ τότε: $(V\cdot Lu)(x) = -\int_0^x u''(t)dt = -u'(t)\Big|_{t=0}^{t=x} = \cancel{u'(0)}^{\,0} - u'(t)$

Άρα $(V^*VLu)(x) = \int_x^1 (-u')(t)\,dt = [-u]_{t=x}^{t=1} = -\cancel{u(1)}^{\,0} + u(x) = u(x)$.

Ο V είναι συμπαγής γιατί έχει πυρήνα

$k(x,t) = \chi_{(0,x)}(t) \in L^2((0,1)\times(0,1))$ $\quad (Vu)(x) = \int_0^1 k(x,t)\,u(t)\,dt$

Και επειδή ο V^*V δεν έχει αρνητικές ιδιοτιμές η $\|V^*V\|$ ισούται με τη μέγιστη (θετική) ιδιοτιμή του L^{-1}

Έστω $\lambda > 0$ ιδιοτιμή του L, τότε $\exists\ \varphi \in D(A)$ τέτοιο ώστε:

$L\varphi = \lambda\varphi$ δηλαδή $\begin{cases} -\varphi'' = \lambda\varphi \\ \varphi'(0) = 0 \\ \varphi(1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \varphi'' + \mu^2\varphi = 0 \Longrightarrow \varphi(x) = C_1\cdot \cos(\mu x) + C_2\cdot \sin(\mu x)$

ΕΦΜ6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 29/5/2018

$\varphi(1)=0 \implies C_1 \cdot \cos\mu + C_2 \cdot \sin\mu = 0$

$\varphi'(x) = \mu\left[-C_1 \sin(\mu x) + C_2 \cdot \cos(\mu x)\right]$

$\varphi'(0)=0 \implies C_2$

Άρα $\cos \mu = 0 \implies \mu = \mu_n = n\pi - \frac{\pi}{2} \quad n=1,2,\ldots$

Άρα οι ιδιοτιμές του L είναι $\lambda_n = \left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2 \quad n=1,\ldots$

Η μικρότερη ιδιοτιμή είναι η $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4}$

και άρα $\|V^* V\| = \|L^{-1}\| = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{4}{\pi^2}$

$\|V\|^2 \implies \|V\| = 2/\pi$