Μάθημα 1ο   ΕΔ. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αθανασιάδης)   2/10/2018

Βιβλιογραφία:

1. D. Logan: Applied Mathematics (κεφάλαια 2,3)
2. J. Troutman: Variational Calculus and optimal control: Optimization with elementary convexity (1996)
3. L. Elsgolc: Calculus of Variations, (2007)

Λογισμός Μεταβολών

$$\begin{pmatrix} y' = \overset{\text{συνεχής}}{f}(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{pmatrix} \iff y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s,y(s))\,ds$$

$$\int_\alpha^\beta f(x,y(x))\,dx \qquad \int_\alpha^\beta f(y,y')\,dx \qquad \int_\alpha^\beta \sqrt{1+y'^2}\,dx$$

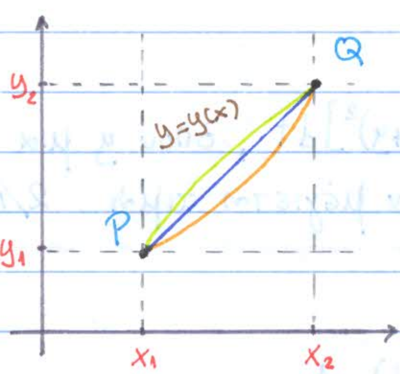
$$C^1([\alpha,\beta]) \ni y \to \mathbb{R}$$

Ορισμός: A: σύνολο "αποδεκτών" συναρτήσεων

$J: A \to \mathbb{R}$ συναρτησοειδές (ή συναρτησιακό)

Παραδείγματα:

1 Ελαχιστοποίηση μήκους τόξου



$P(x_1,y_1)$

$Q(x_2,y_2)$

$\Gamma: y=y(x) \quad x_1 \le x \le x_2$

$y(x_1)=y_1 \quad , \quad y(x_2)=y_2$

$A = \{ y \in C^1([x_1,x_2]), y(x_1)=y_1, y(x_2)=y_2 \}$

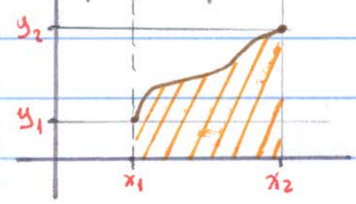
Η λύση είναι $y = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1$

$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+y'^2}\,dx$ μήκος τόξου (Γ) $J: A \longrightarrow J(y)$

2. Ελαχιστοποίηση επιφάνειας $z = z(x,y)$

$$J(z) = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy$$

3. Πρόβλημα εμβαδού

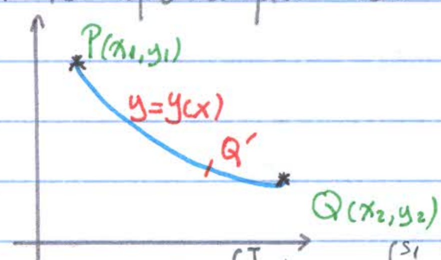


$y = y(x) > 0$, $x \in [x_1, x_2]$, $0 < x_1 < x_2$

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} y(x)\, dx$$

$$A = \{ y \in C([x_1, x_2]),\ y(x) > 0,\ 0 < x_1 < x_2 \}$$

4. Το πρόβλημα του βραχυστόχρονου



Πως θα ελαχιστοποιήσουμε τον χρόνο που θα χρειαστεί το σώμα από τη θέση P να πάει στη θέση Q

(χρόνος) (1) $T = \int_0^T dt = \int_0^{s_1} \frac{dt}{ds}\, ds = \int_0^{s_1} \frac{1}{v}\, ds = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{v}\, dx$

$\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$, $S = \int \|\vec{r}(t)\|\, dt$

$ds = \sqrt{1+y'^2}\, dx$, $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$

καμπύλη σε παραμετρική μορφή

Από αρχή διατήρηση της ενέργειας $E_{ολ}$ = σταθερή

$$E_K(P) + E_\Delta(P) = E_K(Q') + E_\Delta(Q')$$

$$0 + mg y_1 = \frac{1}{2} m v^2 + mg y \implies v = \sqrt{2g(y_1 - y)} \quad (2)$$

Από (1) & (2) $\implies J(y) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2g(y_1-y)}}\, dx$

Ασκήσεις

1. Να δειχθεί ότι το συναρτησοειδές : $J(y) = \int_0^1 [y' \sin \pi y - (t+y)^2]\, dt$, όπου y μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, επί του $t \in [0,1]$ παίρνει την μέγιστη τιμή $2/\pi$ για την συνάρτηση $y(t) = -t$

2. $J(y) = \int_0^1 (1+x) y'^2\, dx$ όπου $y \in C^2$ με $y(0) = 0$ και $y(1) = 1$.
Από όλες τις συναρτήσεις της μορφής : $y(x) = x + c_1 x(1-x) + c_2 x^2 (1-x)$ όπου c_1, c_2 σταθερές, να βρεθεί ποιά ελαχιστοποιεί το J.