Μάθημα 2ο   Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αθανασιάδης)   16/10/2018

Ακρότατα Συναρτησοειδών

$J(y) = \int_a^b L(x, y(x), y'(x))dx$ $y \in A$ σύνολο αποδεκτών συναρτήσεων
$L: B \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$f: I = (x_1, x_2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$ λέμε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της $f \iff \exists\ \delta > 0 : f(x_0) \leq f(x)\ \forall\ x \in I$ με $(x - x_0) < \delta$
αναγκαία συνθήκη $f'(x_0) = 0$

Παραδείγματα:

1. Ο χώρος $\mathbb{R}^n$: $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$
$\|\vec{y}\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2}$
$\|\vec{y}\| = \max\{|y_1|, |y_2|, \dots |y_n|\}$

2. Ο γραμμικός χώρος $C([\alpha, \beta]) \equiv C[\alpha, \beta]$
$\|y\|_M = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y(x)|$
$\|y\|_1 = \int_\alpha^\beta |y(x)|dx$

3. Ο γραμμικός χώρος $C^1[\alpha, \beta]$
$\|y\|_w = \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y(x)| + \max_{\alpha \leq x \leq \beta} |y'(x)|$

Παράγωγος συναρτησοειδούς

Αν $f: I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $x_0 + h \in I$ $f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$
$f(x_0+h) - f(x_0) = h f'(x_0) + o(h)$ $h \to 0$
Έστω $J: A \to \mathbb{R}$ $y_0 \in A$, $A \subseteq V$, γραμμικός χώρος με νόρμα
$h \in V$ τέτοιο ώστε $y_0 + \varepsilon h \in A$ ε: αρκετά μικρό

$$\left.\begin{array}{l} \Delta J = J(y_0 + \varepsilon h) - J(y_0) \\ F(\varepsilon) = J(y_0 + \varepsilon h) \\ F(\varepsilon) = F(0) = \frac{F'(0) \cdot \varepsilon}{1!} + \frac{F''(0) \cdot \varepsilon^2}{2!} + \dots \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta J = \varepsilon(F'(0)) + O(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0$$

$F'(0) = \frac{d}{d\varepsilon} J(y_0 + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon = 0}$

Ορισμός: Έστω V γραμμικός χώρος με νόρμα και $A \subseteq V$ ένα σύνολο αποδεκτών συναρτήσεων και έστω $y_0 \in A$ και $h \in V$ τέτοιος ώστε $y_0 + \varepsilon h \in A$ $\forall$ ε αρκετά μικρό. Η πρώτη μεταβολή (Grâteaux) του J στο y_0 ($J: A \to \mathbb{R}$) κατά την κατεύθυνση h, ορίζεται:

$$\delta J(y_0, h) = \frac{d}{d\varepsilon} J(y_0 + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = F'(0)$$

Παραδείγματα:

① $J(y) = \int_0^1 (3y^2 + x)\,dx + y^2(0)$ $\quad y \in C[0,1]$ $\quad y_0 = x,\ h = x+1$ $\quad 0 \le x \le 1$

$J(y_0 + \varepsilon h) = J(x + \varepsilon(x+1)) = J((\varepsilon+1)x + \varepsilon)$

$J(y_0 + \varepsilon h) = \int_0^1 [3(x^2 + \varepsilon^2(x+1)^2 + 2x \cdot \varepsilon(x+1)) + x]\,dx + y^2(0)$

$\delta J(x, x+1) = 5$

② $J(y) = \int_0^1 (1 + y'(x)^2)\,dx$ $\quad y \in C^1[0,1]$ $\quad y(0) = 0$ $\quad y(1) = 1$

$A = \{ y \in C^1[0,1],\ y(0) = 0,\ y(1) = 1 \}$

$J(y_0 + \varepsilon h) = J(x, x(1-x)) = 2 + \varepsilon^2/3$

Θεώρημα: Έστω ένας γραμμικός χώρος V με νόρμα και $A \subseteq V$. Αν $y_0 \in A$ είναι σημείο τοπικού ελαχίστου συναρτησοειδούς $J: A \to \mathbb{R}$, τότε $\delta J(y_0, h) = 0$ για όλες τις αποδεκτές τιμές του h.

Αναγκαία συνθήκη: $J(y) = \int_\alpha^\beta L(x, y, y')\,dx$, $\quad J(y + \varepsilon h) = \int_\alpha^\beta L(x, y + \varepsilon h, y' + \varepsilon h')\,dx$

$\frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_\alpha^\beta [L_y(x,y,y')h + L_{y'}(x,y,y')h']\,dx = \Delta J(y,h)$

$\int_\alpha^\beta [L_y(x,y,y')h + L_{y'}(x,y,y')h']\,dx = 0$

Ασκήσεις

① $f \in C[\alpha,\beta]$ και ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x) \cdot h(x)\,dx = 0$ για $h \in C^2[\alpha,\beta]$ $h(\alpha) = h(\beta) = 0$ τότε $f(x) = 0$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$

② $f \in C[\alpha,\beta]$, $\int_\alpha^\beta f(x) \cdot h'(x)\,dx = 0$, $h \in C^1[\alpha,\beta]$, $h(\alpha) = h(\beta) = 0$, τότε $f(x) = c$ $\forall x \in [\alpha,\beta]$

③ Άσκηση 2.5 (Logan): Πότε ένα συναρτησοειδές λέγεται γραμμικό

④ Άσκηση 2.6 (Logan): Πότε είναι συνεχές

Μάθημα 3ο   Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αθανασιάδης)   23/10/2018

Εξίσωση του Euler

Λήμμα 1: $f \in C[\alpha,\beta]$, $h \in C^2[\alpha,\beta]$: $h(\alpha)=h(\beta)=0$, $\int_\alpha^\beta f(x)h(x)\,dx=0$
$\Rightarrow f(x)=0 \quad \forall x\in[\alpha,\beta]$

Απόδειξη:

Έστω $\exists x_0\in(\alpha,\beta)$: $f(x_0)>0$, τότε $f(x)>0$ για $x\in[x_1,x_2]\subset[\alpha,\beta]$, $x_0\in(x_1,x_2)$

Θεωρούμε $h(x)=\begin{cases}(x-x_1)^3(x_2-x)^3, & x\in[x_1,x_2]\\ 0, & x\notin[x_1,x_2]\end{cases}$

$\int_\alpha^\beta f(x)h(x)\,dx=\int_{x_1}^{x_2}(x-x_1)^3(x_2-x)^3\cdot f(x)\,dx>0$ Άτοπο

Παρατήρηση: Το λήμμα ισχύει και για $h\in C^n$ τότε $h(x)=\begin{cases}(x-x_1)^{n+1}(x_2-x)^{n+1}, & x\in[x_1,x_2]\\ 0, & x\notin[x_1,x_2]\end{cases}$

Λήμμα 2: $f\in C[\alpha,\beta]$, $h\in C^1[\alpha,\beta]$, $h(\alpha)=h(\beta)=0$, $\int_\alpha^\beta f(x)h'(x)\,dx=0$
$\Rightarrow f(x)=$ σταθερά $\forall x\in[\alpha,\beta]$

Απόδειξη:

$h(x)=\int_\alpha^x[f(\xi)-c]\,d\xi$, $c:\int_\alpha^\beta[f(x)-c]\,dx=0$ και έστω f όχι σταθερά

$\int_\alpha^\beta[f(x)-c]h'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(x)h'(x)\,dx-c\cdot\int_\alpha^\beta h'(x)\,dx=0$

$\int_\alpha^\beta[f(x)-c]h'(x)\,dx=\int_\alpha^\beta[f(x)-c]^2\,dx>0$ Άτοπο

Λήμμα 3: $f\in C[\alpha,\beta]$, $h\in C^2[\alpha,\beta]$, $h(\alpha)=h(\beta)=h'(\alpha)=h'(\beta)=0$, $\int_\alpha^\beta f(x)h''(x)\,dx=0$
$\Rightarrow f(x)=c_1x+c_2 \quad \forall x\in[\alpha,\beta]$

Απόδειξη:

c_1,c_2 : $\int_\alpha^\beta[f(x)-c_1x-c_2]\,dx=0$ $\quad \int_\alpha^\beta\int_\alpha^x[f(\xi)-c_1\xi-c_2]\,d\xi\,dx=0$

$h(x)=\int_\alpha^x\int_\alpha^\xi[f(s)-c_1s-c_2]\,ds\,d\xi$

Ένα απλό πρόβλημα μεταβολών

$J(y)=\int_\alpha^\beta L(x,y,y')\,dx$, $y\in A$ (1)

$A=\{y\in C^2[\alpha,\beta] : y(\alpha)=y_1, y(\beta)=y_2\}$

$L\in C^2([\alpha,\beta]\times\mathbb{R}^2)$, αναγκαία συνθήκη για να έχει τοπικό ελάχιστο το συναρτησοειδές: $\delta J(y,h)=0$

(1)

Θεώρημα: Αν το συναρτησοειδές $J(y)=\int_\alpha^\beta L(x,y,y')\,dx$, $y\in A$ έχει τοπικό ελάχιστο στη y, τότε η y είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $\boxed{L_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}L_{y'}(x,y,y')=0,\ x\in[\alpha,\beta]}$ (2)

Απόδειξη

$\frac{d}{d\varepsilon}J(y+\varepsilon h)\big|_{\varepsilon=0}=0$, Έστω $h\in C^2[\alpha,\beta]$: $h(\alpha)=h(\beta)=0$ τότε:

$J(y+\varepsilon h)=\int_\alpha^\beta L(x,y+\varepsilon h,y'+\varepsilon h')\,dx$

$d/d\varepsilon\, J(y+\varepsilon h)=\int_\alpha^\beta [L_y(x,y+\varepsilon h,y'+\varepsilon h')\cdot h+L_{y'}(x,y+\varepsilon h,y'+\varepsilon h')\cdot h']\,dx$

$d/d\varepsilon\, J(y+\varepsilon h)\big|_{\varepsilon=0}=\int_\alpha^\beta [L_y(x,y,y')h+L_{y'}(x,y,y')h']\,dx=0$

Η αναγκαία συνθήκη: $\int_\alpha^\beta [L_y(x,y,y')h+L_{y'}(x,y,y')h']\,dx=0$ (3)

Στο $\int_\alpha^\beta L_{y'}(x,y,y')h'\,dx=L_{y'}(x,y,y')h(x)\big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta \frac{d}{dx}L_{y'}(x,y,y')h(x)\,dx$

$=-\int_\alpha^\beta d/dx\, L_{y'}(x,y,y')\,h(x)\,dx$ (4)

Από (3) και (4) $\Rightarrow \int_\alpha^\beta [L_y(x,y,y')-d/dx\, L_{y'}(x,y,y')]h\cdot dx \xRightarrow{\text{Λήμμα 1}}$ (2)

Η συνάρτηση (2) είναι η εξίσωση Euler και είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση ως προς y $2^{ης}$ τάξης και γενικά μη γραμμική

Ειδικές Περιπτώσεις:

(1) $L=L(x,y)$: (2) $\Rightarrow L_y(x,y)=0$ (Είναι μια αλγεβρική εξίσωση)

(2) $L=L(x,y')$: (2) $\Rightarrow L_{y'}(x,y')=C$ (σταθερά) (διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης)

(3) $L=L(y,y')$: (2) $\Rightarrow L-y'L_{y'}=C$

$\frac{d}{dx}(L-y'L_{y'})=\frac{d}{dx}L-y''L_{y'}-y'\frac{d}{dx}L_{y'}=L_yy'+L_{y'}y''-y''L_{y'}-y'\frac{d}{dx}L_{y'}=y'\left(L_y-\frac{d}{dx}L_{y'}\right)\overset{(2)}{=}0.$

Ασκήσεις.

3.4 Να βρεθεί το ακρότατο του $J(y)=\int_1^2\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}\,dx$, $y(1)=0$ $y(2)=1$

$L(x,y')=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}$ $\qquad L_{y'}(x,y')=\frac{2y'}{2x\sqrt{1+y'^2}}=\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=C_1$

$y'=\frac{C_1x}{\sqrt{1-C_1^2x^2}} \Rightarrow y=\int\frac{C_1x}{\sqrt{1-C_1^2x^2}}\,dx+C_2 \longrightarrow x^2+(y-C_2)^2=\frac{1}{C_1^2}\Rightarrow x^2+(y-2)^2=5$

Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αθανασιάδης) 23/10/2018

(3.3) Να δειχθεί ότι η εξίσωση Euler για το συναρτησοειδές
$J(y) = \int_\alpha^\beta f(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx$ έχει τη μορφή:
$f_y - f_x y' - \frac{f y''}{1+y'^2} = 0$

$L(x,y,y') = f(x,y)\sqrt{1+y'^2}$
$L_y = f_y\sqrt{1+y'^2}$
$L_{y'} = \frac{f \cdot 2y'}{2\sqrt{1+y'^2}}$

(Άσκ) $J(y) = \int_\alpha^\beta (x-y)^2\,dx$
$L(x,y) = x-y = 0$

(3.1) Να βρεθούν τα ακρότατα των:
(α) $J(y) = \int_0^1 y'\,dx$, $y \in C^2[0,1]$, $y(0)=0$, $y(1)=1$
(β) $J(y) = \int_0^1 yy'\,dx$, $y \in C^2[0,1]$, $y(0)=0$, $y(1)=1$
(γ) $J(y) = \int_0^1 xyy'\,dx$, $y \in C^2[0,1]$, $y(0)=0$, $y(1)=1$

(3.7) Να βρεθεί το ακρότατο του $J(y) = \int_0^1 (1+x)y'^2\,dx$, $y \in C^2$ με $y(0)=0$ και $y(1)=1$. Ποιό είναι το ακρότατο αν η συνοριακή συνθήκη στο $x=1$ γίνει $y'(1)=0$;

(3.11) Να βρεθούν τα ακρότατα του $J(y) = \int_\alpha^\beta (x^2y'^2 + y^2)\,dx$ $y \in C^2[\alpha,\beta]$