Μάθημα 4º Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αθανασιάδης) 30/10/2018

Ασκήσεις

(1) Δίνεται το $J(y)=\int_0^{\pi}\sqrt{1-y^2(x)}\,dx$, να εξετάσεται αν τα ακόλουθα σύνολα μπορούμε να τα χρησιμοποιήσουμε σαν αποδεκτά σύνολα συναρτήσεων

- $A_1 = C[0,\pi]$ ΟΧΙ
- $A_2 = \{y\in C[0,\pi] : \|y\|_\infty \le 1\}$ ΝΑΙ

(2) $J(y)=\int_\alpha^\beta \sin y(x)\,dx + y^2(\beta)$, $y\in A = C[\alpha,\beta]$. Να βρείτε την πρώτη μεταβολή

$\delta J(y,h) = \frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}$ υπολογίζω τη τιμή $J(\varepsilon+h)$

$J(y+\varepsilon h) = \int_\alpha^\beta \sin(y(x)+\varepsilon h(x))\,dx + (y+\varepsilon h)^2(\beta)$

$\frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon h) = \int_\alpha^\beta \cos(y(x)+\varepsilon h(x))h(x)\,dx + 2(y(\beta)+\varepsilon h(\beta))\,h(\beta)$

$\frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = \int_\alpha^\beta \cos y(x)\,h(x)\,dx + 2\cdot y(\beta)\cdot h(\beta)$

(3) Logan 2.12 $J(y)=\int_0^1(1+x)y'^2(x)\,dx$, $y\in A=\{y\in C^2[0,1] : y(0)=0, y(1)=1\}$ να υπολογιστεί ότι η πρώτη μεταβολή $\delta J(y_0,h)=0$ $\forall h\in C^2[0,1]$, $h(0)=h(1)=0$ και $y_0(x) = \ln(1+x)/\ln 2$

$\delta J(y_0,h) = 2\cdot\int_0^1 (1+x)y_0'(x)\cdot h'(x)\,dx = 2\int_0^1(1+x)\frac{1}{(1+x)\ln 2}h'(0)$

$=\frac{2}{\ln 2}h(x)\Big|_0^1 = 0$

(4) Logan 2.14 $J(y)=\int_0^1(3y^2+x)\,dx + y^2(0)$ $y\in C[0,1]$, $y_0(x)=x$, $h(x)=x+1$

$\delta J(y_0,h) = \frac{d}{d\varepsilon}J(y_0+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0}$

$J(y_0+\varepsilon h) = \int_0^1[3(y_0+\varepsilon h)^2+x]\,dx + (y_0+\varepsilon h)^2(0)$

$\frac{d}{d\varepsilon}J(y_0+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = \left[\int_0^1[6(y_0+\varepsilon h)h]\,dx + 2(y_0+\varepsilon h)h\right]_{\varepsilon=0} = \ldots = 5$

(5) Έστω $J(y)$ και η y_0 το κάνει ελάχιστο, να δειχθεί ότι αν υπάρχει $C_0\in\mathbb{R}$ και $C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ τότε το $C^2 J(y) + C_0$ έχει ελάχιστο και εκείνο το y_0

(6) Να βρεθούν τα ακρότατα και η εξίσωση Euler για το
$J(y) = \int_\alpha^\beta (y^2 + y'^2 + 2y \cdot e^x)\, dx$ και αν $y(\alpha)=0$, $y(\beta)=1$

Θα προκύψει διαφορική εξίσωση γραμμική $2^{ης}$ τάξης
Υπόδειξη: $y'' - y = e^x$
$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^x$ αναζητώ μια λύση της μορφής $y_\varepsilon = \alpha x \cdot e^x$

Γενικεύσεις
(α) Παράγωγοι υψηλότερης τάξης
Θεωρούμε συναρτησοειδή της μορφής $J(y) = \int_\alpha^\beta L(x, y, y', y'')\, dx$, $y \in A$
πχ $A = \{ y \in C^4[\alpha,\beta] : y(\alpha) = A_1, y'(\alpha) = A_2, y(\beta) = B_1, y'(\beta) = B_2 \}$, $L \in C^2[\alpha,\beta] \times \mathbb{R}^3$
Ζητάμε να βρούμε μια αναγκαία συνθήκη για να έχει τοπικό ακρότατο.
Έστω $y \in A$: Το $J(y)$ τοπικό ελάχιστο ως προς κατάλληλη νόρμα
Επιλέγουμε $h \in C^4[\alpha,\beta] : h(\alpha) = h'(\alpha) = h(\beta) = h'(\beta) = 0$. Πάμε και σχηματίζουμε την

$$\delta J(y,h) = \frac{d}{d\varepsilon} J(y + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \int_\alpha^\beta L(x, y+\varepsilon h, y' + \varepsilon h', y'' + \varepsilon h'')\, dx \Big|_{\varepsilon=0}$$

$$= \int_\alpha^\beta [L_y h + L_{y'} h' + L_{y''} h'']\, dx = 0 \quad (*)$$

$$\int_\alpha^\beta L_{y'} h\, dx = \overbrace{L_{y'}(x,y,y',y'') h(x) \Big|_\alpha^\beta}^{0} - \int_\alpha^\beta h \frac{d}{dx} L_{y'}\, dx = -\int_\alpha^\beta h \frac{d}{dx} L_{y'}\, dx$$

$$\int_\alpha^\beta L_{y''} h''\, dx = \overset{0}{L_{y''} h' \Big|_\alpha^\beta} - \int_\alpha^\beta h' \frac{d}{dx} L_{y''}\, dx = \overbrace{-h \frac{d}{dx} L_{y''} \Big|_\alpha^\beta}^{0} + \int_\alpha^\beta h \frac{d^2}{d^2x} L_{y''}\, dx$$

Αν αντικαταστήσω τα τελευταία στην (*)
$$\int_\alpha^\beta \left[L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} + \frac{d^2}{d^2x} L_{y''}\right] h\, dx = 0$$
Αυτό είναι μια αναγκαία συνθήκη
Μπορούμε να τον βελτιώσουμε
Αν χρησιμοποιήσουμε ένα λήμμα
Λήμμα 1: $f \in C[\alpha,\beta]$, $h \in C^4[\alpha,\beta]$ και $h(\alpha) = h'(\alpha) = h(\beta) = h'(\beta) = 0$ και $\int_\alpha^\beta f(x) h(x)\, dx = 0$
$\Rightarrow f(x) = 0 \ \forall x \in [\alpha,\beta]$, τελικά η αναγκαία συνθήκη γράφεται
$$L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} + \frac{d^2}{d^2x} L_{y''} = 0$$

Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αθανασιάδης) 30/10/2018

Να γίνει η αντίστοιχη διαδικασία για ένα συναρτησοειδές για $J(y)=\int_\alpha^\beta L(x,y,y',y'',y''')\,dx$ $y\in A$ και γενικότερα

Ειδικές Περιπτώσεις

(i) Έστω $L=L(x,y',y'') \Rightarrow L_{y'}-\frac{d}{dx}L_{y''}=C$

(ii) $L=L(y,y',y'') \Rightarrow L-y'(L_{y'}-\frac{d}{dx}L_{y''})-y''L_{y''}=C$

Θα δείξουμε ότι ισούται με 0.

$$\frac{d}{dx}\left[L-y'(L_{y'}-\frac{d}{dx}L_{y'}-\frac{d}{dx}L_{y''})-y''L_{y''}\right]=$$

$$=L_y y'+L_{y'}y''+L_{y''}y'''-y''L_{y'}-y'\frac{d}{dx}L_{y'}+y''\frac{d}{dx}L_{y''}+y'\frac{d^2}{d^2x}L_{y''}-y'''L_{y''}-y''\frac{d}{dx}L_{y''}$$

$$=y'\overbrace{\left(L_y-\frac{d}{dx}L_{y'}+\frac{d^2}{d^2x}L_{y''}\right)}^{0}=0$$

Ασκήσεις

4.3 $J(y)=\int_\alpha^\beta L(x,y,y',y'')\,dx$ να δειχθεί ότι η εξίσωση Euler έχει πρώτο ολοκλήρωμα $L_{y'}-\frac{d}{dx}L_{y''}=C$ όταν η L είναι ανεξάρτητη του y. Δηλαδή $L=L(x,y',y'')$

και αν η L ανεξάρτητη του x να δειχθεί ότι $L-y'(L_{y'}-\frac{d}{dx}L_{y''})-y''L_{y''}=C$

4.4 Από Logan