Μάθημα 5º   Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αθανασιάδης)   6/11/2018

(β) Πολλές συναρτήσεις

Θεωρούμε $J(y_1,y_2) = \int_\alpha^\beta L(x,y_1,y_2,y_1',y_2')\,dx \quad (1)$

$y_1,y_2 \in C^2[\alpha,\beta] \quad y_1(\alpha)=A_1,\ y_1(\beta)=B_1,\ y_2(\alpha)=A_2,\ y_2(\beta)=B_2$

Έστω y_1,y_2 ελαχιστοποιούν το (1). Επιλέγουμε $h_1,h_2 \in C^2[\alpha,\beta]: h_1(\alpha)=h_1(\beta)=h_2(\alpha)=h_2(\beta)=0$

Αναγκαία συνθήκη: $\frac{d}{d\varepsilon} J(y_1+\varepsilon h_1, y_2+\varepsilon h_2)\Big|_{\varepsilon=0}$

$$\frac{d}{d\varepsilon} J(y_1+\varepsilon h_1, y_2+\varepsilon h_2)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_\alpha^\beta L(x,y_1+\varepsilon h_1,y_2+\varepsilon h_2,y_1'+\varepsilon h_1',y_2'+\varepsilon h_2')\,dx\Big|_{\varepsilon=0}$$

$$=\int_\alpha^\beta \left[L_{y_1}h_1 + L_{y_2}h_2 + L_{y_1'}h_1' + L_{y_2'}h_2'\right]dx = \int_\alpha^\beta\left[\left(L_{y_1}-\frac{d}{dx}L_{y_1'}\right)h_1 + \left(L_{y_2}-\frac{d}{dx}L_{y_2'}\right)h_2\right]dx$$

καταλήγουμε:

$L_{y_1}-\frac{d}{dx}L_{y_1'}=0,\quad L_{y_2}-\frac{d}{dx}L_{y_2'}=0$ Οι εξισώσεις Euler για το πρόβλημά μας

Γενικότερα: $J(y_1,y_2,\dots,y_n)=\int_\alpha^\beta L(x,y_1,\dots,y_n,y_1',\dots,y_n')\,dx$, $y_i\in C^2[\alpha,\beta]$, $y_i(\alpha)=A_i$, $y_i(\beta)=B_i \quad i=1,2,\dots,n$

$$L_{y_i}-\frac{d}{dx}L_{y_i'}=0 \qquad i=1,2,\dots,n$$

Παράδειγμα: Να λυθεί το πρόβλημα $J(y_1,y_2)=\int_0^{\pi/2}(y_1'^2+y_2'^2+2y_1y_2)\,dx$

$y_1(0)=0,\ y_1(\pi/2)=1,\ y_2(0)=0,\ y_2(\pi/2)=1$

$L=y_1'^2+y_2'^2+2y_1y_2$

$L_{y_1}=2y_2 \quad L_{y_2}=2y_1$

$L_{y_1'}=2y_1' \quad L_{y_2'}=2y_2'$

Άρα οι εξισώσεις Euler είναι $\rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \cdot\ 2y_2-\frac{d}{dx}(2y_1')=0 \\ \cdot\ 2y_1-\frac{d}{dx}(2y_2')=0 \end{array}\right\}$

$\Rightarrow \begin{cases} y_1''-y_2=0 \\ y_1-y_2''=0 \end{cases} \leadsto y_1^{(4)}-y_1=0 \Rightarrow y_1(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$

$y_1(0)=0 \Rightarrow C_1+C_2+C_3=0,\ y_1(\pi/2)=1 \Rightarrow C_1e^{\pi/2}+C_2e^{-\pi/2}+C_4=1$

παρόμοια $y_2(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}-C_3\cos x-C_4\sin x$

$y_2(0)=0 \Rightarrow C_1+C_2+C_3=0,\quad y_2(\pi/2)=1 \Rightarrow C_1e^{\pi/2}+C_2e^{-\pi/2}-C_4=1$

Και έχω να "λύσω" αυτά τα 2 συστήματα, για να βρω τα C_1,C_2,C_3,C_4 για κάθε μια

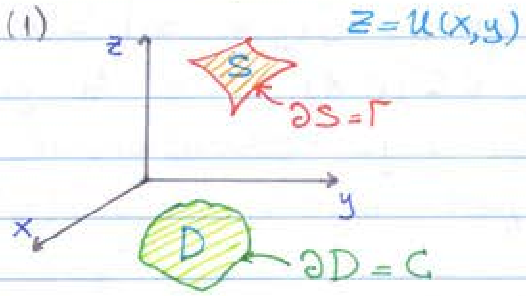
Να δω επίσης την Άσκηση 4.2 που είναι παρόμοια

Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών (Προβλήματα πολλαπλών ολοκληρωμάτων)

$J(u) = \iint_D L(x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y))\,dx\,dy \quad (1)$

$u: D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ D κλειστό χωρίο

$A = \{u \in C^2(D) : u(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in \partial D = C\}$



Έστω $u \in A$ ελαχιστοποιεί το (1)

Επιλέγουμε $h \in C^2(D) : h(x,y) = 0,\ (x,y) \in C$

$\delta J(u,h) = \frac{d}{d\varepsilon} J(u+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} \iint_D L(x,y,u+\varepsilon h, u_x+\varepsilon h_x, u_y+\varepsilon h_y)\,dx\,dy\,\Big|_{\varepsilon=0}$

$= \iint_D [L_u h + L_{u_x} h_x + L_{u_y} h_y]\,dx\,dy = \iint_D [L_u - \frac{\partial}{\partial x} L_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{u_y}]\,h\,dx\,dy - \iint_D [\frac{\partial}{\partial x}(h L_{u_x}) + \frac{\partial}{\partial y}(h L_{u_y})]\,dx\,dy$

Θ Green για 2 μεταβλητές (στο $\mathbb{R}^2$): $\vec{F} = (P,Q)$ $\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy$

Άρα $\delta J(u,h) = \iint_D [L_u - \frac{\partial}{\partial x} L_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{u_y}]\,h\,dx\,dy$

Η εξίσωση Euler: $L_u - \frac{\partial}{\partial x} L_{u_x} - \frac{\partial}{\partial y} L_{u_y} = 0$

Λήμμα: $g \in C(D)$, $h^2 \in C^2(D)$: $h = 0\,|_{\partial D}$ και $\iint_D g(x,y)\,h(x,y)\,dx\,dy = 0$ Τότε $g(x,y) = 0$ στο D

Άσκηση 4.5 (α) $J(u) = \iint_R (x^2 u_x^2 + y^2 u_y^2)\,dx\,dy$

$L = x^2 u_x^2 + y^2 u_y^2$, $L_u = 0$, $L_{u_x} = 2x^2 u_x$, $L_{u_y} = 2y^2 u_y$

$-\frac{\partial}{\partial x}(2x^2 u_x) = -4x u_x - 2x^2 u_{xx}$

$-\frac{\partial}{\partial x}(2y^2 u_y) = -4y u_y - 2y^2 u_{yy}$

$\Longrightarrow 2x u_x + x^2 u_{xx} + 2y u_y + y^2 u_{yy} = 0$

Παράδειγμα: $J(u) = \iiint_B (\nabla u)^2\,dx\,dy\,dz \quad \dots \to u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$

$\Delta u = 0$ μια αρμονική συνάρτηση