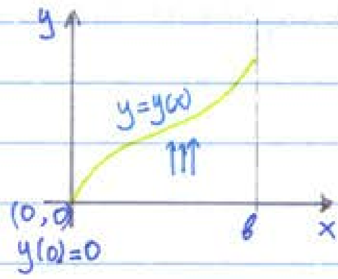
Μάθημα 6ο Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αθανασιάδης) 13/11/2018

4) Το πρόβλημα του ελεύθερου άκρου (φυσικές συνοριακές συνθήκες)

$$J(y) = \int_\alpha^\beta L(x,y,y')\,dx \quad , y \in A \quad (1)$$

$$A = \{ y \in C^2[\alpha,\beta] : y(\alpha) = y_1 ,\ y(\beta) = \text{άγνωστο} \}$$

Παράδειγμα:



Έστω y συνάρτηση τοπικού ελαχίστου

Επιλέγουμε $h \in C^2[\alpha,b]$ τέτοιο ώστε $h(\alpha)=0$ $\quad y+\varepsilon h \in A$

$$\delta J(y,h) = \frac{d}{d\varepsilon} J(y+\varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon}\int_\alpha^\beta L(x, y+\varepsilon h, y'+\varepsilon h')\,dx\Big|_{\varepsilon=0} =$$

$$= \int_\alpha^\beta [L_y h + L_{y'} h']\,dx = \int_\alpha^\beta \left(L_y - \frac{d}{dx}L_{y'}\right)h\,dx + hL_{y'}\Big|_\alpha^\beta =$$

$$= \int_\alpha^\beta \left(L_y - \frac{d}{dx}L_{y'}\right)h\,dx + h(\beta)L_{y'}(\beta, y(\beta), y'(\beta)) = 0 \quad (2)$$

Για $h(\beta)=0$ από την (2) $\displaystyle\int_\alpha^\beta \left(L_y - \frac{d}{dx}L_{y'}\right)h\,dx = 0 \overset{\text{Λήμμα}}{\Longrightarrow} L_y - \frac{d}{dx}L_{y'} = 0 \quad (3)$

$\xRightarrow[(3)]{(2)} h(\beta)L_{y'}(\beta, y(\beta), y'(\beta)) = 0$ (ισχύει $\forall h(\beta)$) $\Longrightarrow L_{y'}(\beta, y(\beta), y'(\beta)) = 0$

φυσική συνοριακή συνθήκη

$\rightsquigarrow$ Αν $A = \{ y \in C^2[\alpha,\beta] : y(\alpha) = \text{απροσδιόριστο},\ y(\beta) = y_2 \}$

τότε $L_{y'}(\alpha, y(\alpha), y'(\alpha)) = 0$ φυσική συνοριακή συνθήκη

Παράδειγμα: Να βρω εξίσωση Euler για

$$J(y) = \int_0^1 [x^2+1]y'^2 - (x^3+1)y^2\,dx \quad , y(0)=0,\ y(1) = \text{μη προσδιορισμένο}$$

$$\left.\begin{aligned} L &= (x^2+1)y'^2 - (x^3+1)y^2 \\ L_y &= -2(x^3+1)y \\ L_{y'} &= 2(x^2+1)y' \end{aligned}\right\} \quad -2(x^3+1)y - \frac{d}{dx}\left(2(x^2+1)y'\right) = 0 \Longrightarrow$$

$\Rightarrow (x^3+1)y + 2xy' + (x^2+1)y'' = 0$

Έπω $Ly'(1, y(1), y'(1)) = 0 \Rightarrow 2(1+1)y'(1) = 0 \Rightarrow y'(1) = 0$

$\Rightarrow (x^2+1)y'' + 2xy' + (x^3+1)y = 0 \qquad y(0) = 0\ ,\ y'(1) = 0$

$y(x) = 0$ λύση Αν είχα πρόβλημα αρχικών τιμών θα ήταν μοναδική επειδή οι συντελεστές των $y^{(i)}$ είναι συνεχείς συναρτήσεις του x

Μάθημα 7ο   Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αθανασιάδης)   20/11/2018

Άσκηση: Να βρεθεί το ακρότατο για το συναρτησοειδές
$J(y)=\int_1^e \left(\frac{1}{2}x^2 y'^2 - \frac{1}{8}y^2\right) dx$ $y(1)=1$, $y(e)=$ απροσδιόριστο

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}x^2y'^2 - \frac{1}{8}y^2 \\ L_y &= -\frac{1}{4}y \\ L_{y'} &= x^2y' \end{aligned}\right\} \Rightarrow -\frac{1}{4}y - \frac{d}{dx}(x^2y')=0 \Rightarrow -\frac{1}{4}y - 2xy' - x^2y''=0$$

$$x^2y'' + 2xy' + \frac{1}{4}y = 0$$

$L_{y'}(e,y(e),y'(e))=0 \Rightarrow e^2y'(e)=0 \Rightarrow y'(e)=0$

Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης (είναι σε μορφή Euler)
$x^2y'' + 2xy' + \frac{1}{4}y = 0$ $x>0$
2 τρόποι για να την λύσουμε
(i) Αναζητούμε λύσεις της μορφής : x^p
(ii) Αντικατάσταση μεταβλητής $x=e^s$ $x>0$

Γενικότερα για την επίλυση της $x^2y'' + axy' + by = 0$, $x>0$
$\begin{cases} x=e^s \\ y(x)=y(e^s)=u(s) \end{cases}$ τότε η εξίσωση γίνεται : $u'' + (a-1)u' + bu = 0$

- αν $\Delta = (a-1)^2 - 4b > 0$ p_1, p_2 οι ρίζες
  $u(s) = c_1 e^{p_1 s} + c_2 e^{p_2 s} \Rightarrow y(x) = c_1 x^{p} + c_2 x^{p}$
- αν $\Delta = 0$ $u(s) = c_1 e^{ps} + c_2 \cdot s \cdot e^{ps} \Rightarrow y(x) = c_1 x^p + c_2 \ln x \, x^p$
- αν $\Delta < 0$ $p = \lambda + i\mu$ $u(s) = e^{\lambda s}(c_1 \cos(\mu s) + c_2 \sin(\mu s))$

$\Rightarrow y(x) = x^{\lambda}(c_1 \cos(\mu \ln x) + c_2 \sin(\mu \ln x))$

Εδώ $u'' + u' + \frac{1}{4}u = 0$

$p^2 + p + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \left(p+\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Rightarrow p = -1/2$ άρα είμαστε στην 2η περίπτωση

Αρχή του Hamilton

Θα μελετήσουμε τις εξισώσεις κίνησης ενός φυσικού προβλήματος χρησιμοποιώντας ένα μεταβολικό πρόβλημα
Η ιδέα στην οποία στηρίζεται αυτή η διαδικασία είναι η εξής:
Η χρονική εξέλιξη του μηχανικού συστήματος γίνεται πάνω σε μια διαδρομή ελάχιστης αντίδρασης. Ειδικότερα η αρχή Hamilton υποστηρίζει ότι: Η χρονική εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος γίνεται έτσι ώστε το ολοκλήρωμα της διαφοράς κινητικής μείον δυναμικής ενέργειας να είναι στάσιμο

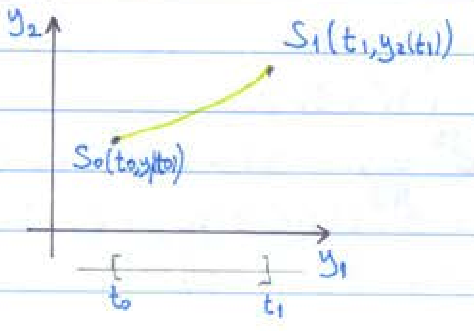
Έστω $y_1, y_2, \dots, y_n$ συναρτήσεις του χρόνου t, οι οποίες καθορίζουν πλήρως την κατάσταση ενός μηχανικού προβλήματος (γενικευμένες συντεταγμένες)
Επίσης $\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n$ (γενικευμένες ταχύτητες)

Κινητική Ενέργεια: $T = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\alpha_{ij}}_{\text{συναρτήσεις}} (y_1, y_2, \dots, y_n)\, \dot{y}_i \dot{y}_j$

Δυναμική Ενέργεια: $V \longrightarrow V(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)$

Θεωρούμε το συναρτησοειδές $J(y_1, \dots, y_n) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (T-V)\,dt$
και θέλουμε να είναι στάσιμο, δηλαδή
$\delta J(y_1, \dots, y_n) = 0$

Για $n=2$



Εξισώσεις Lagrange του συστήματος: $L_{y_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{y}_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$

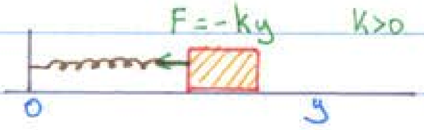
Αν $L_t = 0$ τότε $\boxed{L - \sum_{i=1}^{n} \dot{y}_i L_{\dot{y}_i} = \text{σταθερό}}$ νόμος διατήρησης

$\boxed{H = -L + \sum_{i=1}^{n} \dot{y}_i L_{\dot{y}_i}}$ Χαμιλτονιανή

Ει. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αθανασιάδης) 20/11/2018

Παραδείγματα

1 Αρμονικός ταλαντωτής



Κινητική Ενέργεια : $T = \frac{1}{2} m \dot{y}^2$

Δυναμική Ενέργεια : $V = \frac{1}{2} k y^2$ $\left(F = -dV/dy \Rightarrow V = -\int -(ky)\,dy = ky^2/2 \right)$

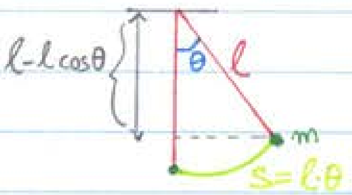
Λαγκραζιανή : $L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 - \frac{1}{2} k y^2$

Εξίσωση κίνησης (Εξίσωση Lagrange)

$$L_y - \frac{d}{dt} L_{y'} = 0 \Rightarrow -ky - \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = 0 \leadsto y(t) = c_1 e^{i\sqrt{k/m}\,t} + c_2 e^{-i\sqrt{k/m}\,t} \leadsto y(t) = c_1' \cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t\right) + c_2' \sin\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t\right)$$

2 Απλό εκκρεμές



Κινητική Ενέργεια : $T = \frac{1}{2} m \dot{s}^2 = \frac{1}{2} m \ell^2 \cdot \dot{\theta}^2$

Δυναμική Ενέργεια: $V = m \cdot g (\ell - \ell \cos\theta)$

Λαγκραζιανή: $L = T - V = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 - mg(\ell - \ell \cdot \cos\theta)$

Εξίσωση Lagrange: $L_\theta - \frac{d}{dt} L_{\dot{\theta}} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin\theta = 0$