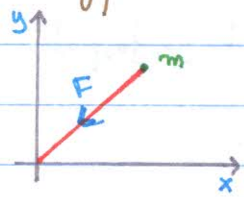
Μάθημα 8ο   Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αθανασιάδης)   27/11/2018

Παράδειγμα: Κίνηση στο επίπεδο υπό την επίδραση μιας κεντρικής δύναμης



$$F = -k/r^2$$
$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\,(\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t))$$
$$V = -k/r$$

Πολικές συντεταγμένες
$$x = r\cdot\cos\theta = r(t)\cdot\cos\theta(t)$$
$$y = r\cdot\sin\theta = r(t)\cdot\sin\theta(t)$$

$$T = \frac{1}{2} m\left[(\dot r\cos\theta(t) - r\sin\dot\theta(t))^2 + (\dot r\sin\theta(t) + r\cos\dot\theta(t))^2 \right] = \frac{1}{2} m\left[\dot r^2 + r^2\dot\theta^2\right]$$

$$J(r,\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{1}{2} m(\dot r^2 + r^2\dot\theta^2) + \frac{k}{r}\right] dt$$

Εξισώσεις Lagrange

$$\begin{array}{l|l|l} L_\theta - \frac{d}{dt} L_{\dot\theta} = 0 & -\frac{d}{dt}(m r^2\dot\theta) = 0 & m r^2 \dot\theta = c \\ \quad\Rightarrow & & \Rightarrow \\ L_r - \frac{d}{dt} L_{\dot r} = 0 & m r\dot\theta^2 - \frac{k}{r^2} - \frac{d}{dt}(m\dot r) = 0 & m\ddot r - m r\dot\theta^2 + \frac{k}{r^2} = 0 \end{array}$$

Εξισώσεις Hamilton (κανονικές εξισώσεις)

$$J(y) = \int_{t_0}^{t_1} L(t,y,\dot y)\,dt \qquad (1)$$

$L = T - V$ T: κινητική ενέργεια   V: Δυναμική Ενέργεια

$L_y - \frac{d}{dt} L_{\dot y} = 0$ (Euler-Lagrange)   (2)

Θεωρούμε το (1) και το (2) και όπως είναι γνωστό η (2) είναι μια διαφορική εξίσωση 2ης τάξης.
Με κατάλληλο μετασχηματισμό θα το μετατρέψουμε σε σύστημα 1ης τάξης.
Ορίζουμε μια καινούρια μεταβλητή

$p = L_{\dot y}(t,y,\dot y)$ (3)

αυτή την ονομάζουμε κανονική ορμή

Από την (3) $F(t,y,\dot y,p) = L_{\dot y}(t,y,\dot y) - p \quad \in C'$

αν $\exists\ (t_0,y_0,\dot y_0,p_0)$: $F(t_0,y_0,\dot y_0,p_0)=0$ και $F_{\dot y}(t_0,y_0,\dot y_0,p_0) \neq 0$ τότε

$\exists\ \varphi$: $\dot y = \varphi(t,y,p)$ (4) σε περιοχή του σημείου $(t_0,y_0,\dot y_0,p_0)$

δηλαδή αν $L_{\dot y\dot y} \neq 0$ προκύπτει η (4)

Ορίζουμε : $H = -L + \dot y L_{\dot y}$ Χαμιλτονιανή

$$H(t,y,p) = -L(t,y,\varphi(t,y,p)) + p\cdot\varphi(t,y,p) \quad (5)$$

Από την (5) θα προκύψουν οι 2 εξισώσεις που θα μας δώσουν το σύστημα $1^{ης}$ τάξης

Παράδειγμα από συνήθεις $y'' = f(t,y,\dot y) \rightsquigarrow \begin{cases} y=y_1 \\ y'=y_2 \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(t,y_1,y_2) \end{cases}$

Από την (5) $\Longrightarrow$ $\dfrac{\partial H}{\partial p} = -\underbrace{\dfrac{\partial L}{\partial \dot y}}_{L_{\dot y}=p}\dfrac{\partial\varphi}{\partial p} + \varphi + p\dfrac{\partial \varphi}{\partial p} = \varphi = \dot y \Longrightarrow$

$$\dot y = \frac{\partial H}{\partial p}(t,y,p) \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial y} = -\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial L}{\partial \dot y}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + p\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial L}{\partial y}$$

λόγω της (2) $\dfrac{\partial H}{\partial y} = -\dfrac{d}{dt}L_{\dot y} \overset{(3)}{=} -\dot p \Longrightarrow \dot p = -\dfrac{\partial H}{\partial y}(t,y,p) \quad (7)$

Οι (6) και (7) είναι αυτές που λέμε εξισώσεις του Hamilton (ή κανονικές εξισώσεις)

Παράδειγμα: Αρμονικός Ταλαντωτής

$L = \frac{1}{2}m\dot y^2 - \frac{1}{2}ky^2$. Να βρεθούν οι εξισώσεις Hamilton

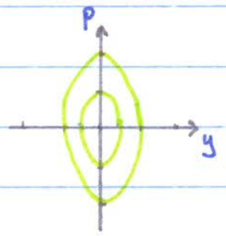
Ορίζω $p = L_{\dot y} = m\dot y \Longrightarrow \dot y = \dfrac{p}{m} \quad (8)$

$$H(t,y,p) = -\left[\tfrac{1}{2}m\left(\tfrac{p}{m}\right)^2 - \tfrac{1}{2}ky^2\right] + p\cdot\frac{p}{m} \Longrightarrow H = \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} + \frac{1}{2}ky^2 \quad (9)$$

Από (9), (6) $\Rightarrow$ $\dot{y} = p/m$ (10)

Από (9), (7) $\Rightarrow$ $\dot{p} = -ky$ (11)

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{ky}{p/m} \Rightarrow p \cdot dp + kmy\, dy = 0 \Rightarrow p^2 + km y^2 = C$$



Επίπεδο φάσεων

Είχαμε ήδη δει ότι $\ddot{y} + \frac{k}{m} \cdot y = 0$

$\Rightarrow y(t) = C_1 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\, t + C_2 \cdot \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\, t$

Γενικότερα: Αν έχουμε $J(y_1, \dots, y_n) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y_1, \dots, y_n, \dot{y}_1, \dots, \dot{y}_n)\, dt$ τότε οι εξισώσεις Euler-Lagrange είναι του τύπου

$L_{y_i} - \frac{d}{dt} L_{\dot{y}_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$ και ορίζουμε $p_i = L_{\dot{y}_i} \quad i = 1, \dots, n$

τότε η Χαμιλτονιανή θα είναι

$$H(t, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n) = -L + \sum \dot{y}_i L_{\dot{y}_i}$$

Αν $\det(L_{\dot{y}_i \dot{y}_j}) \neq 0 \quad i,j = 1, \dots, n \quad \exists\, \varphi_i : \dot{y}_i = \varphi_i(t, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n)$ οπότε

$$H(t, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n) = -L(t, y_1, \dots, y_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n) + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(t, y_1, \dots, y_n, p_1, \dots, p_n) \cdot p_i$$

Οι αντίστοιχες κανονικές εξισώσεις

$$\dot{y}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial y_i}$$

Ασκήσεις:
- Να το δώ για 2 διαστάσεις
- Με πολικές συντεταγμένες
- 5.13 Logan