Μάθημα 9ο Ελ. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αθανασιάδης) 4/12/2018

Αντίστροφα Προβλήματα

Γνωρίζοντας την εξίσωση $\ddot{y} = F(t, y, \dot{y})$ ① να βρεθεί η Λαγκρανζιανή τ.ω να ισχύει:

$$L_y - \frac{d}{dt} L_{\dot{y}} = 0 \quad ②$$

$$\Longrightarrow \quad L_y - L_{\dot{y}t} - \dot{y} L_{\dot{y}y} - \ddot{y} L_{\dot{y}\dot{y}} = 0 \quad ③$$

Από (1) και (3) έχω: $-L_y + L_{\dot{y}t} + \dot{y} L_{\dot{y}y} + F L_{\dot{y}\dot{y}} = 0$ ④

Απο (4) παραγωγίζω ως προς $\dot{y}$ (υποθέτω ότι $L \in C^3$)

$$\Longrightarrow -L_{yy'} + L_{y'y't} + L_{y'y} + y' L_{y'y'y} + F_{y'} L_{y'y'} + F L_{y'y'y'} = 0 \quad ⑤$$

Θέτω $U(t, y, y') = L_{y'y'}(t, y, y')$ ⑥

(5), (6) $\Longrightarrow U_t + y U_y + F U_{y'} + F_{y'} U = 0$ ⑦ Μερική Διαφορική Εξίσωση 1ης Τάξης.

Παράδειγμα: Να βρώ τη Λαγκρανζιανή $L(t, y, y')$ για την διαφορική εξίσωση
$\ddot{y} + \alpha \dot{y} + b y = 0$, $\alpha, b \in \mathbb{R}$ ⑧

1ος Τρόπος. Ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία καταλήγω στην

$$U_t + \dot{y} U_y + (\alpha \dot{y} + b y) U_{\dot{y}} - \alpha U = 0$$

2ος Τρόπος: Πολλαπλασιάζουμε μια συνάρτηση f:

$$f(t)\ddot{y} + \alpha f(t) \cdot \dot{y} + b f(t) y = 0 \quad ⑨$$

και απο (3) έχω $-L_y + L_{\dot{y}t} + \dot{y} L_{\dot{y}y} + \ddot{y} L_{\dot{y}\dot{y}} = 0$

Παίρνουμε $L_{\dot{y}\dot{y}} = f(t)$ ⑩

Απο αυτήν έπαμε $L_{\dot{y}} = f(t)\dot{y} + M(t, y)$ ⑪

$$\Longrightarrow L = \frac{1}{2} f(t) \dot{y}^2 + \dot{y} M(t, y) + N(t, y) \quad ⑫$$

Από (11) και (12) έχω

$$L_y = \dot{y} M_y + N_y$$
$$L_{\dot{y}t} = f'(t)\dot{y} + M_t$$
$$L_{\dot{y}\dot{y}} = M_y$$

Από (9) $\quad -\dot{y} M_y - N_y + \dot{y} f'(t) + M_t + \dot{y} M_y = f(t)(\alpha \dot{y} + b y)$

$\Rightarrow (M_t - N_y) + \dot{y} f'(t) = \alpha f(t)\dot{y} + b y f(t)$ (13)

Άρα $f'(t) = \alpha f(t) \Rightarrow f(t) = e^{\alpha t}$ (14)

Αυθαίρετες συναρτήσεις

Από (13) και (14) $\Longrightarrow M_t - N_y = b y f(t)$ (15)

Αν πάρω αυθαίρετα : $M = 0$ τότε $N = -\frac{b}{2} y^2 e^{\alpha t}$ (16)

Άρα από (12), (14), (16) $\Longrightarrow L = \frac{1}{2} e^{\alpha t} \dot{y}^2 - \frac{b}{2} y^2 e^{\alpha t}$

Μάθημα 10ο Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αθανασιάδης) 11/12/2018

Ασκήσεις

3.3 3.11 4.4 4.12 5.2 5.15 6.1 6.2 6.7

Ισοπεριμετρικά Προβλήματα

Έστω $y \in C^2[\alpha, b]$ με $y(\alpha) = y_0$, $y(b) = y_1$ το μεταβολικό πρόβλημα
$J(y) = \int_\alpha^b L(x,y,y')dx$ ① που υπόκειται στον περιορισμό σε ολοκληρωτική μορφή
$W(y) = \int_\alpha^b G(x,y,y')dx = C$ ② με $L, G \in C^2$ λέγεται ισοπεριμετρικό πρόβλημα

Χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του Lagrange για συναρτήσεις.

Θεώρημα: Έστω $f, g: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, διαφορίσιμες, υποθέτουμε ότι f στο $\vec{x}_0 \in A$, έχει τοπικό ακρότατο δεσμευμένο και $g(\vec{x}_0) = C$ σταθερά τότε $\exists\ \lambda \in \mathbb{R}$:
$\nabla f^*(\vec{x}_0) = 0$, $g(\vec{x}_0) = C$ όπου $f^* = f + \lambda g$

Έστω y τοπικό ακρότατο της (1) Θεωρούμε τώρα την διπαραμετρική μορφή $z(x) = y(x) + \varepsilon_1 h_1(x) + \varepsilon_2 h_2(x)$ ③ όπου $h_1, h_2 \in [\alpha, b]$ τω:
$h_1(\alpha) = h_1(b) = h_2(\alpha) = h(b) = 0$ ④ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$: περιοχή του μηδενός

Ορίζουμε $J(y + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2) = I(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_\alpha^b L(x, z, z')dx$ ⑤
$W(y + \varepsilon_1 h_1 + \varepsilon_2 h_2) = U(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_\alpha^b G(x, z, z')dx$ ⑥

Αφού το J έχει ελάχιστο στο y, η συνάρτηση I έχει ελάχιστο στο $(0,0)$
Σύμφωνα με το Θεώρημα
$\nabla I^*(0,0) = 0$ δηλαδή $\frac{\partial}{\partial \varepsilon_1} I^*(0,0) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon_2} I^*(0,0) = 0$
$U(0,0) = C$ όπου $I^* = I + \lambda U = \int_\alpha^b L^*(x,y,y')dx = \int_\alpha^b (L + \lambda G)dx$
δηλαδή $L^* = L + \lambda G$ ⑦

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_i} I^*(0,0) = \int_\alpha^b [L^*_y(x,y,y')h_i + L^*_{y'}(x,y,y')h_i']dx = \int_\alpha^b [L^*_y - \frac{d}{dx} L^*_{y'}]h_i\, dx$$

$$L^*_y(x,y,y') - \frac{d}{dx} L^*_{y'}(x,y,y') = 0 \quad ⑧$$

Άσκηση: $J(y)=\int_{-1}^{1} y\,dx$, $y(-1)=y(1)=0$ $\quad W(y)=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=c$

Να βρούμε το τοπικό ακρότατο

$$\left.\begin{array}{l} L=y \\ G=\sqrt{1+y'^2}\end{array}\right\} \Longrightarrow L^*=y+\lambda\sqrt{1+y'^2} \quad (9)$$

Από την (8) και την (9) $\Longrightarrow 1-\lambda\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0 \quad (10)$

$\Longrightarrow y'/(\sqrt{1+y'^2}) = x/\lambda + c_1 \Longrightarrow y'=(x+c_1)/(\sqrt{\lambda^2-(x+c)^2})$

$\Longrightarrow (x+c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2 \quad (11)$

Άσκηση: Να βρεθούν τα ακρότατα του ισοπαραμετρικού προβλήματος

$J(y)=\int_0^1 y^2\,dx$, $\quad W(y)=\int_0^1 y'^2\,dx=1 \quad (12) \quad y(0)=y(1)=0$

$L^*=y^2+\lambda y'^2$

$$2y-\lambda\frac{d}{dx}(2y')=0 \iff \left.\begin{cases} y''-\frac{1}{\lambda}y=0 & \lambda\neq 0\\ y(0)=y(1)=0\end{cases}\right\} \quad (13)$$

Διακρίνω περιπτώσεις

(1) $1/\lambda>0$ $\quad y(x)=c_1e^{\sqrt{1/\lambda}\,x}+c_2e^{-\sqrt{1/\lambda}\,x}$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=c_1+c_2=0 \\ y(1)=c_1e^{\sqrt{1/\lambda}}+c_2e^{-\sqrt{1/\lambda}}=0\end{array}\right\} \quad (14)$$

έχει μόνο την $c_1=c_2 \Longrightarrow y(x)=0$

Για $\lambda>0$ δεν έχει ιδιοσυναρτήσεις το πρόβλημα

(2) $1/\lambda<0$ $\quad y(x)=c_1\cdot\cos(\sqrt{-1/\lambda}\,x)+c_2\cdot\sin(\sqrt{-1/\lambda}\,x)$

$y(0)=0 \Longrightarrow c_1=0$

$y(1)=0 \Longrightarrow c_2\cdot\sin\sqrt{-1/\lambda}=0$

Επειδή θέλουμε λύσεις εκτός της μηδενικής, θα ελέγξουμε το $\sin\sqrt{-1/\lambda}=0 \Longrightarrow$

$\sqrt{-1/\lambda}=n\pi$, $n=1,2,\dots \Longrightarrow \lambda=-1/(n^2\pi^2)$ ιδιοτιμές του προβλήματος (13)

$y_n(x)=\sin(n\pi x)$ $\quad n=1,2,\dots$ ιδιοσυναρτήσεις του Π.Σ.Τ. (13)

Άσκηση 6.1: $J(y)=\int_0^1(y'^2+x^2)\,dx$ $\quad, y(0)=y(1)=0 \quad W=\int_0^1 y^2\,dx=2$

$L^*=y'^2+x^2+\lambda y^2 \rightsquigarrow 2\lambda y-\frac{d}{dx}(2y')=0$

$$\Longrightarrow \begin{cases} y''-\lambda y=0\\ y(0)=y(1)=0\end{cases}$$

- $\lambda>0 \Longrightarrow$ δεν έχει ιδιοτιμές
- $\lambda=0 \Longrightarrow y=c_1x+c_2 \Longrightarrow$ ούτε αυτό έχει ιδιοτιμή.
- $\lambda<0 \Longrightarrow y(x)=c_1\cdot\cos(\sqrt{-\lambda}\,x)+c_2\sin(\sqrt{-\lambda}\,x)$ $, c_1=0 \to \sin(\sqrt{-\lambda})=0 \to \lambda_n=-n^2\pi^2 \quad n=1,2,\dots$

$y_n(x)=\sin(n\pi x)$ ιδιοσυναρτήσεις του Π.Σ.Τ. $\qquad$ ιδιοτιμές