Μάθημα 1ο   Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αλικάκος)   4/10/2018

Θεώρημα Πεπλεγμένης Συνάρτησης

$x^2+y^2=1$

Τοπικά

(Ι) $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$

(ΙΙ) $x = g(y) = \sqrt{1-y^2}$

$\nexists$ κλειστή μορφή $ax^n + bx^{n-1}y + \dots = 0$

Θεώρημα:

Έστω $F(\cdot,\cdot) \in C^1(S)$, $S \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in S$

Υποθέσεις: (Ι) $F(x_0,y_0)=0$

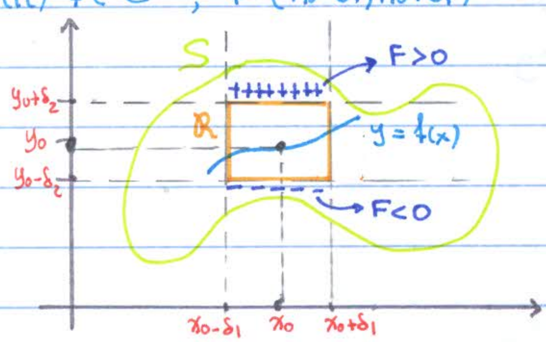
(ΙΙ) $F_y(x_0,y_0)>0$ (χωρίς βλάβη της γενικότητας πήρα >0, θέλω $\neq 0$) $F(x,f(x))=0$

Με ενδιαφέρει να βρω τις λύσεις $F(x,y)=0$ (*)

Συμπέρασμα: $\exists\ \delta_1>0,\ \delta_2>0$ τ.ω: $R=\{|x-x_0|\le\delta_1,\ |y-y_0|\le\delta_2\} \subseteq S$

(i) $\forall\ x \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)\ \exists!\ y \in (y_0-\delta_2, y_0+\delta_2)$ τ.ω $F(x,y)=0$. Δηλαδή ορίζεται $y=f(x)$ τ.ω:
$F(x,f(x))=0\quad \forall\ x \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$

(ii) $f \in C^1$, $f:(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1) \longrightarrow (y_0-\delta_2, y_0+\delta_2)$ $y_0 = f(x_0)$ και $f'(x_0) = -\dfrac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$



Παρατηρήσεις:

- Η σχέση $f'(x_0) = -\dfrac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$ προκύπτει άμεσα από την παραγώγιση της $F(x,f(x))=0$

- Αν θεωρήσουμε $F(x,y)=(y-x^2)(y-x^3)$ που στη περιοχή του $(0,0)$ η $F(x,y)=0$ ορίζει 2 διαφορετικές συναρτήσεις, αυτό δεν είναι αντίφαση στο θεώρημα γιατί παρατηρούμε ότι $F_y(0,0)=0$ άρα δεν ισχύει η υπόθεση ΙΙ

Απόδειξη:

(1) Από υπόθεση $F_y(x_0,y_0)>0 \Longrightarrow F_y(x_0,y)>0$, για $y: |y-y_0|<\delta_2$, επειδή $F \in C^1$
συνεπώς $y \to F(x_0,y)$ ↑ αυστηρά αύξουσα για $y: |y-y_0|<\delta_2$

Γνωρίζω $F(x_0, y_0-\delta_2)<0$, $F(x_0,y_0+\delta_2)>0$.
Λόγω συνέχειας ως προς την πρώτη μεταβλητή $x \Longrightarrow F(x,y_0-\delta_2)<0, F(x,y_0+\delta_2), |x-x_0|<\delta_1$
Για δ_1, δ_2 ενδεχομένως ακόμα μικρότερα $F_y>0$
(2) $\forall\ \bar{x} \in [x_0-\delta_1, x_0+\delta_1]$ η $F(x,y)$ ↑↑ και κάτω είναι <0 και πάνω >0,
άρα $\exists!\ \bar{y} \in [y_0-\delta_2, y_0+\delta_2]$ Συνεπώς ορίζεται συνάρτηση $\bar{x} \xrightarrow{f} \bar{y}$
(3) f συνεχής στο $x=x_0$. Δοθέντος $\varepsilon>0$, έχω $F(x_0,y_0+\varepsilon)>0, F(x_0,y_0-\varepsilon)<0$
Έχω και $F(x, y_0+\varepsilon)>0$, $F(x,y_0-\varepsilon)<0$ $\forall\ x: |x-x_0|<\delta(\varepsilon)$
κατα συνέπεια $\exists\ y^* \in [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon] : y^*=y^*(x)$ τ.ω $F(x,y^*(x))=0$ λόγω μοναδικότητας $y^*(x)=f(x)$.
Καταφέραμε $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ $\forall\ |x-x_0|<\delta$
Για $x^*\neq x_0$, $x^*\in(x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ γνωρίζω $(x^*, f(x^*)) \in R$ $(x^*, y^*) \longleftrightarrow (x_0, y_0)$
$\longrightarrow f^*$ που συμπίπτει με την f, συνεπώς f συνεχής στο $x^* \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$
(4) Διαφορισιμότητα
Φιξάρω το x και $y=f(x)$ διαλέγω Δx τ.ω $x+\Delta x \in (x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)$ και ορίζω
$\Delta y = f(x+\Delta x)-f(x) = f(x+\Delta x)-y$
$F(x,y)=0 = F(x+\Delta x, f(x)+\Delta x) = F(x+\Delta x, y+\Delta y)$
$0 = F(x+\Delta x, y+\Delta y)-F(x,y) = F_x(\bar{x},\bar{y})\Delta x + F_y(\bar{x},\bar{y})\Delta y$

$\bar{x} \in (x, x+\Delta x)$
$\bar{y} \in (y, y+\Delta y)$ Άρα $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{F_x(\bar{x},\bar{y})}{F_y(\bar{x},\bar{y})}$

μπορώ να πάρω $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)} = -\frac{F_x(x,f(x))}{F_y(x,f(x))}$$

Άρα $f \in C^1$