Μάθημα 5ο Ε1 Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αλικάκος) 8/11/2018

Αλγεβρικές Εξισώσεις

Παράδειγμα: Θεωρούμε το πρόβλημα

$$\left.\begin{array}{ll}(\Pi_2) & \varepsilon x^2 + 2x + 1 = 0 \\ (\Pi_0) & 2x + 1 = 0\end{array}\right\}$$

ομαλές διαταραχές ⟶ (ΘΠΣ)

Ιδιόμορφες διαταραχές ⟶ κλίμακες

Έστω $x(\varepsilon)$ = ρίζα ⇝ ομαλό ανάπτυγμα $x(\varepsilon) = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$ (συντελεστές υπό προσδιορισμό)

$\varepsilon(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots)^2 + 2(x_0 + \varepsilon x_1 + \dots) + 1 = 0$ εξισώνω

ε^0 : $2x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = -1/2$

ε^1 : $2x_1 = -x_0^2 \Rightarrow x_1 = -1/2^3$ $Lh = 2h$

$x(\varepsilon) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3}\varepsilon - \dots = -\frac{1}{2} + O(\varepsilon)$

$$\left.\begin{array}{l} F(-1/2, 0) = 0 \\ F_x(x,\varepsilon) = 2\varepsilon x + 2 \\ F_x(-1/2, 0) = 2 \end{array}\right\} \text{ΘΠΣ} \qquad x(\varepsilon) = -\frac{1}{2} + O(\varepsilon)$$

Για την άλλη κλίμακα.

Εξισορρόπηση

- $1^{os} \approx 2^{os}$ ⟶ $\varepsilon x^2 \sim 2x \iff x \sim O(1/\varepsilon)$
- $1^{os} \approx 3^{os}$ ⟶ $\varepsilon x^2 \sim O(1) \iff x \sim O(1/\sqrt{\varepsilon})$
- $2^{os} \approx 3^{os}$ ⟶ $x \sim O(1)$

Εισάγω κλίμακα για να κάνω "ξεδίπλωμα" (unfolding)

$\bar{x} = \frac{x}{1/\varepsilon} = \varepsilon x \qquad x = \bar{x}/\varepsilon$

$\varepsilon(\bar{x}/\varepsilon)^2 + 2(\bar{x}/\varepsilon) + 1 = 0$

$Q(\bar{x},\varepsilon) = \bar{x}^2 + 2\bar{x} + \varepsilon = 0$

$$\left.\begin{array}{l} Q(\bar{x}_0, 0) = \bar{x}_0^2 + 2\bar{x}_0 = 0 \qquad \bar{x}_0 = -2 \\ Q_{\bar{x}}(\bar{x},\varepsilon) = 2\bar{x} + 2, \quad Q_{\bar{x}}(-2,0) = -2 \neq 0 \end{array}\right\} (\text{ΘΠΣ}) \Rightarrow \begin{array}{l} \bar{x}(\varepsilon) = -2 + O(\varepsilon) \\ x(\varepsilon) = -\frac{2}{\varepsilon} + O(1) \end{array}$$

Πολύγωνο Νεύτωνα
(Μέθοδος εξισορρόπησης)

$F(x,y)=0 \iff F(z,w)=0$

$F: \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, αναλυτική

$F(z,w) = w^{k} + \alpha_{k-1}(z)\, w^{k-1} + \dots + \alpha_0(z)$

$\alpha_j(z) = \alpha_j^{(p_j)} z^{p_j} + \alpha_j^{(p_{j+1})} z^{p_{j+1}} + \dots$ $\qquad \alpha_0(z) = \alpha_0^{(p_0)} \neq 0 \quad (\alpha_0^{(p_0)} z^{p_0} + \dots) \quad z=\varepsilon,\ w=x$

(Logan σελ. 65)

Weierstrass Θεώρημα προπαρασκευής (preparation theorem)

$f(w,z)$ αναλυτική $w,z\in\mathbb{C}$ + υπόθεση τότε $f(w,z) = F(w,z)\cdot h(z,w)$, $h(0,0)\neq 0$ ↙ αναλυτική

$f(w,z)=0$ σε περιοχή του $(0,0)$

Παράδειγμα: Να μελετηθούν οι λύσεις της:

$F(w,z) = w^2 + \alpha_0^{(1)} z + \alpha_0^{(3)} z^3 = 0 \qquad \alpha_0^{(1)} \neq 0$ σε περιοχή του $(0,0)$

$\frac{\partial F}{\partial w} = 2w = 0,\ w=0$ άρα δε μπορώ να χρησιμοποιήσω το ΘΠΣ

Για $|z| \ll 1$ η εξίσωση είναι χονδρικά ίδια με την $w^2 + \alpha_0^{(1)} z \approx 0$

που έχει ρίζες $w = \pm (\alpha_0^{(1)})^{1/2} z^{1/2}$

υπενίσεται την κλίμακα $w = v(z) z^{1/2}$, $v(0)\neq 0$

(αλλαγή μεταβλητών) $\rightsquigarrow (v\cdot z^{1/2})^2 + \alpha_0^{(1)} z + \alpha_0^{(3)} z^3 = 0$

$v^2(z)\cdot z + \dots = 0$

$v^2(z)\cdot \alpha_0^{(1)} + \alpha_0^{(3)} z^2 = 0 \rightsquigarrow v_{\pm}(z) = \pm\left(-\alpha_0^{(1)} - \alpha^{(3)} z^2\right)^{1/2}$

Άρα $w_{\pm} = v_{\pm}(z)\, z^{1/2}$ όλες οι λύσεις

Παράδειγμα: $w^3 + \alpha_2^{(1)} z w^2 + \alpha_1^{(3)} z^3 w + \alpha_0^{(4)} z^4 = 0$, $\alpha_1^{(3)} \neq 0$ σε περιοχή του $(0,0)$

$i = 0,1,2$, $j = 1,3,4$

Επειδή είδαμε το προηγούμενο αναζητούμε λύσεις της μορφής:

$w = v(z)\cdot z^{\alpha} \qquad v(0)\neq 0 \qquad \alpha = ;$

Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αλικάκος) 8/11/2018

$z^{3\alpha} v^3 + \alpha_2^{(1)} z^{2\alpha+1} v^2 + \alpha_1^{(3)} z^{3+\alpha} v + \alpha_0^{(4)} z^4 = 0 \qquad |z| \leq \delta$

Εξισορρόπηση

- $3\alpha = 2\alpha + 1 \quad (1)$
- $3\alpha = \alpha + 3 \quad (2)$
- $3\alpha = 4 \quad (3)$
- $2\alpha + 1 = \alpha + 3 \quad (4)$
- $2\alpha + 1 = 4 \quad (5)$
- $3 + \alpha = 4 \quad (6)$

Η (1) δίνει $\alpha = 1$ με εκθέτες $(3, 3, 4, 4)$, από την $(2) \Rightarrow \alpha = 3/2$ με εκθέτες $(9/2, 4, 9/2, 4)$

άρα από την (1) $\quad z^3 v^3 + \alpha_2^{(1)} z^3 v^2 + \alpha_1^{(3)} z^4 + \alpha_0^{(4)} z^4 = 0$

ορίζω $F(z, v) = v^3 + \alpha_2^{(1)} v^2 + \alpha_1^{(3)} z + \alpha_0^{(4)} z = 0 \qquad v(0) \neq 0$

για $z = 0$ $\quad F(0, v) = v^3 + \alpha_2^{(1)} v^2 = 0 \sim v = -\alpha_2^{(1)}$

$\hat{F}(0, -\alpha_2^{(1)})$ από ΘΠΣ $\sim v(z)$, $\hat{F}(z, v(z)) = 0 \qquad w(z) = v(z) z$ Ι

για το (2) $\quad z^{9/2} v^3 + \alpha_2^{(1)} z^4 v^2 + \alpha_1^{(3)} z^{9/2} v + \alpha_0^{(4)} z^4 = 0 \quad$ (απλοποιώ)

$z^{1/2} v^3 + \alpha_2^{(1)} v^2 + \alpha_1^{(3)} z^{1/2} v + \alpha_0^{(4)} = 0 \xrightarrow{\text{ΘΠΣ}}$ (θέτω $s = z^{1/2}$)

$\hat{F}(s, v) = s \cdot v^3 + \alpha_2^{(1)} v^2 + \alpha_1^{(3)} s \cdot v + \alpha_0^{(4)} = 0$

Για $s = 0 \quad \alpha_2^{(1)} v^2 + \alpha_0^{(4)} = 0 \Longrightarrow v = \pm \left(- \dfrac{\alpha_0^{(4)}}{\alpha_2^{(1)}} \right)^{1/2}$

$\tilde{F}_v(s, v) \neq 0$ από ΘΠΣ $\Rightarrow \exists \; v_\pm(z) \; \hat{F}(z^{1/2}, v_\pm(z)) = 0 \ldots \quad W_\pm(z) = v_\pm(z) z^{3/2}$ ΙΙ

Πολύγωνο Νεύτωνα: Φτιάχνω κυρτή πολυγωνική γραμμή έτσι ώστε τα A θα είναι είτε επί της γραμμής ή από πάνω από αυτή