Μάθημα 6ο   Ει. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αλικάκος)   22/11/2018

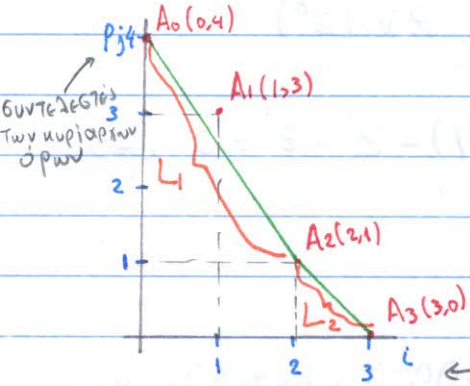
$F(z,w)=0$

$F(z,w) = w^k + \alpha_{k-1}(z)\, w^{k-1} + \dots + \alpha_0(z)$

$\alpha_j(z) = \alpha_j z^{p_j} + \alpha_j^{(p_j+1)} z^{p_j+1} + \dots \qquad \alpha_0^{(p_0)} \neq 0$

$\alpha(z) = \alpha_0^{(p_0)} z^{p_{j0}}$

$w^3 + \alpha_2 z^{(1)} \cdot w^2 + \alpha_1^{(3)} z^{(3)} w + \alpha_0^{(4)} z^4 = 0$



Δυνάμεις του w^i

εύρος

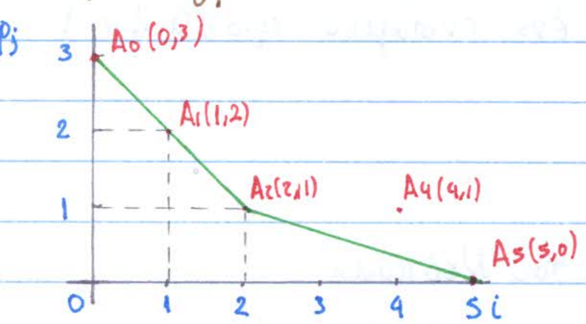
$L_1 = \overline{A_0A_2} \qquad \alpha_1 = -\frac{3}{2} \qquad n_1 = 2 \implies$ 2 λύσεις της μορφής $\begin{cases} V_1(z^{6_1})\, z^{3/2} \\ V_2(z^{6_2})\, z^{3/2} \end{cases}$

$L_2 = \overline{A_2A_3} \qquad \alpha_2 = -1 \qquad n_2 = 1 \implies$ 1 λύση της μορφής $V_3(z^{6_3})\, z$

κλίσεις των τμημάτων

Παράδειγμα: $w^5 + 2zw^4 - zw^2 - 2zw - z^4 - z^3 = 0$

(ο κυρίαρχος όρος είναι το z^3)



$L_1 = \overline{A_0A_2}$, $n_1 = 2$, $\alpha_1 = 1 \to$ 2 λύσεις της μορφής $V(z^{6_1})\, z$

$L_2 = \overline{A_2A_5}$, $n_2 = 3$, $\alpha_2 = 1/3 \to$ 3 λύσεις της μορφής $V(6^2)\, z^{1/3}$

και γνωρίζω ότι $V_i(0) \neq 0$

Αντικαθιστώ το $z^{1/3} V(z^6)$

$(z^{1/3} \cdot V(z^6))^5 + 2z\,(z^{1/3} V(z^6))^4 - z\,(z^{1/3} \cdot V(z^6))^2 - 2z^2 (z^{1/3} V(z^6)) - z^4 - z^3 = 0 \iff$

$z^{5/3} V(z^6)^5 + 2 z^{7/3} V(z^6)^4 - z^{5/3} V(z^6)^2 - z^{7/3} V(z^6) - z^4 - z^3 = 0 \iff$

$V^5 + 2z^{2/3} V^4 - V^2 - 2z^{2/3} V - z^{7/3} - z^{4/3} = 0$

$F(z,V)$, $\quad F(0,V_*) = V_*^5 - V_*^2 = V_*^2 (V_*^3 - 1) = 0 \qquad$ ($V_* = 0$ όχι αποδεκτό)

$\rightsquigarrow V_* = e^{\frac{2\pi k i}{3}} \quad k = 0,1,2$

αν κάνω αλλαγή μεταβλητής $s = z^{1/3}$

$V^5 + 2 \cdot s^2 V^4 + V^2 - 2s^2 V - s^7 - s^4 = 0$

Εφαρμόζω το Θ.Π.Σ σε περιοχή κοντά σε κάθε μια V_*

$v_1(s)$ $\qquad$ $v_2(s)$ $\qquad$ $v_3(s)$

$v_1(0) = 1$ $\qquad$ $v_2(0) = e^{2\pi i/3}$ $\qquad$ $v_3(0) = e^{4\pi i/3}$

όμως $s = z^{1/3} \longrightarrow z^{1/3} v_1(z^{1/3})$, $z^{1/3} v_2(z^{1/3})$, $z^{1/3} v_3(z^{1/3})$

ψάχνω τώρα για τις ρίζες της μορφής $z v_1(z^6)$, $z v_2(z^6)$
αντικαθιστώ

$$(z\,v(z^6))^5 + 2z\,(z\,v(z^6))^4 - z\,(z\,v(z^6))^2 - 2z^2(z\,v(z^6)) - z^4 - z^3 = 0 \iff$$

$$z^2v^5 + 2zv^4 - v^2 - 2v - z - 1 = 0$$

$$G(z,v) = z^2v^5 + 2z^2v^4 - v^2 - 2v - z - 1$$

$$G(0,\bar v) = -\bar v^2 - 2\bar v - 1 = 0 \iff (\bar v + 1)^2 = 0$$

δεν εφαρμόζεται το ΘΠΣ λόγω διπλής ρίζας , αλλάζω μεταβλητή

$\bar v = v + 1 \Rightarrow v = \bar v - 1$ και άρα έχω

$$z^2(\bar v - 1)^5 + 2z^2(\bar v - 1)^4 - 4(\bar v - 1)^2 - 2(\bar v - 1) - z - 1 = 0 \quad ⊛$$

Ενδιαφέρομαι για ρίζες κοντά στο $(0,0)$ άρα για $\bar v = 0$, $z = 0$

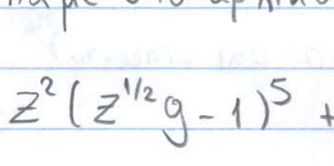
$(\bar v - 1)^5 = \bar v^5 - 5\bar v^4 + \dots + \boxed{5\bar v - 1}$ (άρα επειδή θα χρειαστώ μόνο τον κυρίαρχο

$(\bar v - 1)^4 = \bar v^4 - 4\bar v^3 + \dots - \boxed{4\bar v + 1}$ όρο θα λύσω ένα ενδιάμεσο πρόβλημα)

Ενδιάμεσο Πρόβλημα

$$z^2(5\bar v - 1) + 2z^2(1 - 4\bar v) - \bar v^2 - z = 0 \iff$$

$\bar v^2 + 3z^2\bar v - z^2 + z = 0$ και ξαναπέρνω πολύγωνο του Νεύτωνα



$L_1 = \overline{A_0A_2}$ κλίση $1/2$ εύρος 2.

$\bar v = g(z^0)\, z^{1/2}$

Πάμε στο αρχικό πρόβλημα ⊛ και βάζουμε όπου $\bar v = z^{1/2}g \Longrightarrow$

$$z^2(z^{1/2}g - 1)^5 + 2z^2(z^{1/2}g - 1)^4 - g^2z - z = 0$$

$$R(z,g) = z(z^{1/2}g - 1)^5 + 2z(z^{1/2}g - 1)^4 - g^2 - 1 = 0$$

Και τώρα εφαρμόζω το ΘΠΣ

Καλούμε $z^{1/2}=s$

$$\bar{R}(s,g) = s^2(sg-1)^5 + 2s^2(sg-1)^4 - g^2 - 1 = 0$$

$$\bar{R}(0,g) = -g^2-1=0 \qquad g(0)=\pm i$$

$$\bar{R}(0,\pm i) = 0 \;,\; \bar{R}_g(0,\pm i)\neq 0$$

$$g_+(s), g_-(s) = g_+(z^{1/2}), g_-(z^{1/2})$$

$$\bar{V}_\pm = z^{1/2} g_\pm(z^{1/2}) \longrightarrow V_\pm = z^{1/2} g_\pm(z^{1/2}) - 1$$

$$W = z\,V(z^6) = z\left[z^{1/2} g_\pm(z^{1/2}) - 1\right]$$