Μάθημα 7ο   Ε1. Μέθοδοι Εφαρμοσμένων Μαθηματικών Ι (Αλικάκος)   29/11/2018

# Μέθοδος WKB

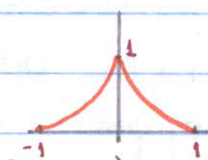
Χονδρικά έχουμε 2 ειδών φαινόμενα

## 1 Συγκεντρώσεις

Παράδειγμα: $\varepsilon^2 y'' - y = 0 \quad y(0) = 1 \;,\; y(1) = 0$

Λύνεται εύκολα με το χέρι και η λύση είναι:

$$y_\varepsilon(x) = \frac{e^{2/\varepsilon}}{e^{2/\varepsilon} - 1}\left[e^{-x/\varepsilon} - e^{x - 2/\varepsilon}\right]$$




Με κατάλληλη κανονικοποίηση $\frac{y_\varepsilon}{\varepsilon} \longrightarrow \delta_0(x)$ (Dirac)

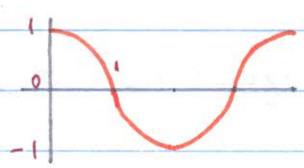
## 2 Ταλαντώσεις

Παράδειγμα: $\varepsilon^2 y'' + y = 0 \quad y(0) = 1 \;,\; y(1) = 0$

Λύνεται εύκολα και η λύση είναι

$$y_\varepsilon(x) = \frac{\sin\left(\frac{1-x}{\varepsilon}\right)}{\sin\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)} \;, \quad \varepsilon \neq (n\pi)^{-1}$$

(γιατί η ομογενής έχει πυρήνα)




$\sin y/\varepsilon \rightsquigarrow y_n/\varepsilon = n\pi \longrightarrow y_n = n \cdot \varepsilon\pi$

## Μείγμα Ταλαντώσεων – Συγκεντρώσεων

Παράδειγμα: (Εξίσωση Airy) $\varepsilon^2 y'' - xy = 0 \quad , -1 \le x \le 1$

Όταν $x > 0$ συμπεριφέρεται σαν την $\varepsilon^2 y'' + y = 0$

Όταν $x < 0$ συμπεριφέρεται σαν την $\varepsilon^2 y'' - y = 0$

Η μέθοδος έχει εφαρμογή

$L$ = γραμμικός τελεστής 2ης τάξης

$-Ly'' = \lambda y$ + Συνοριακές Συνθήκες

$y = y(x) \quad \alpha \le x \le \beta$

Μας ενδιαφέρει ένα πρόβλημα ιδιοτιμών.

Παράδειγμα: $-y'' = \lambda y$ Για $\lambda >> 1 \to \varepsilon = 1/\lambda$

$y(0)=y(\pi)=0$ και γράφω το πρόβλημα $-\frac{1}{\lambda}Ly = y$

## Μετασχηματισμός Liouville

Παράδειγμα: Εξίσωση Schröndinger $\varepsilon^2 y'' = Q(x)y$ $\quad Q(x)\neq 0$

Μας ενδιαφέρει $0<\varepsilon<<1$

Με τα παραδείγματα που είδαμε να μας δίνουν την ιδέα, ψάχνουμε λύση της μορφής $y(x)=\exp\{S(x)/\delta\}$, όπου $S(x)$ υπό προσδιορισμό.

Σκεφτόμαστε το $\frac{1}{\delta}S(x)$ σαν ανάπτυγμα δυνάμεων του $\delta$

$\frac{1}{\delta}S(x) = \frac{1}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty} \delta^n S_n(x) = \frac{1}{\delta}\left(S_0(x)+\delta S_1(x)+\dots\right)$ (κρατάω λίγους όρους)

$y' = \exp\{S(x)/\delta\}\, S'(x)/\delta$

$y'' = \exp\{S(x)/\delta\}\cdot(S'(x)/\delta)^2 + \exp\{S(x)/\delta\}\cdot S''(x)/\delta = \exp\{\frac{1}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n S_n\}\left[\frac{1}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n S_n'' + \frac{1}{\delta^2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n S_n'\right)^2\right]$

$\frac{1}{\delta}\left(S_0'(x)+\delta S_1'(x)+\dots\right)^2 = \left(2\delta\cdot S_0'\cdot S_1' + (S_0')^2 + \delta^2(S_1')^2+\dots\right)/\delta = \frac{2}{\delta}S_0'S_1' + \frac{1}{\delta^2}S_0'^2 + S_1'^2$

Τα βάζω στην εξίσωση και έχω.

$\frac{\varepsilon^2}{\delta^2}(S_0')^2 + \frac{2\varepsilon^2}{\delta}S_0'S_1' + \frac{\varepsilon^2}{\delta}S_0'' + \dots = Q(x)$ Αν πάρω $\delta\sim\varepsilon$ συγκρίσιμα $\Longrightarrow$

$(S_0')^2 + 2\varepsilon S_0'S_1' + \varepsilon S_0'' = Q(x)$

1) $S_0'^2(x) = Q(x)$ $\leftarrow$ Εξίσωση της εικόνας $|\nabla S|^2 = 1$

2) $2S_0'(x)S_1'(x) + S_0''(x) = 0$ $\leftarrow$ Εξίσωση μεταφοράς.

1) $\rightsquigarrow$ $S_0(x) = \pm\int_{\alpha}^{x} \sqrt{Q(t)}\,dt$

2) $\rightsquigarrow$ $S_1' = \frac{1}{2}\frac{S_0''}{S_0'} \Rightarrow S_1 = -\frac{1}{2}\ln S_0' = -\frac{1}{2}\sqrt{Q(x)} = \ln(Q(x))^{-1/4}$

και άρα

$y_{WKB} = C_1 Q^{-1/4}(x)\exp\{\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha}^{x}\sqrt{Q(t)}\,dt\} + C_2 Q^{-1/4}(x)\exp\{-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\alpha}^{x} \sqrt{Q(t)}\,dt\}$

$C_1, C_2$ σταθερές.

Εφαρμογές: $\varepsilon^2 y''+y=0$ $\quad \varepsilon\to 0$ $\quad y(0)=0,\ y(1)=1,\ Q(x)=-1$

$S_0(x)=\pm ix$, $S_1(x)=0$ $\rightsquigarrow$ $y=\exp\{\pm ix/\varepsilon\}$

Το οποίο είναι η ακριβής λύση $y_{WKB} = C_1\sin\frac{x}{\varepsilon} + C_2 \sim x/\varepsilon$