Τετάρτη
14/11

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ
ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

1. Στη θεωρία των μη γραμμικών ταλαντώσεων συναντάμε συχνά το εξής πρόβλημα : Ζητάμε μία πραγματική απεικόνιση $u(x)$, $x \in [0,1]$, δυο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ που να ικανοποιεί το συνοριακό πρόβλημα "δύο σημείων"

$$\begin{aligned} &u''(x) = g(u(x)), \quad 0 \le x \le 1, \\ &u(0) = \alpha, \quad u(1) = \beta, \end{aligned} \qquad (*)$$

όπου $g : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ μία δεδομένη δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και α, β δεδομένες πραγματικές σταθερές. Είναι γνωστό ότι αν η g ικανοποιεί την

$$g'(s) \ge \underline{g} > -\pi^2, \quad \forall s \in \mathbb{R}^1, \qquad (1)$$

τότε υπάρχει μοναδική λύση $u(x)$ του $(*)$.

Για να επιλύσουμε προσεγγιστικά το πρόβλημα $(*)$ με μια μέθοδο πεπερασμένων διαφορών, εισάγουμε τον ομοιόμορφο διαμερισμό $x_i = ih$, $0 \le i \le n+1$, όπου $(n+1)h = 1$, $n \in \mathbb{N}$. Ζητάμε να κατασκευάσουμε προσεγγίσεις U_i, $0 \le i \le n+1$, των τιμών της λύσης $u(x_i)$, $0 \le i \le n+1$, που ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} &(U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1})/h^2 = g(U_i), \quad 1 \le i \le n, \\ &U_0 = \alpha, \quad U_{n+1} = \beta. \end{aligned} \qquad (2)$$

Δηλαδή το διάνυσμα $U = (U_1, \ldots, U_n)^T$ των αγνώστων ικανοποιεί το $n \times n$ μη γραμμικό σύστημα

$$F(U) = 0, \qquad (3)$$

όπου $F(U) = [f_1(U), \ldots, f_n(U)]^T$ και όπου οι συναρτήσεις $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ ορίζονται ως

$$\begin{aligned} f_1(U) &= -\alpha + 2U_1 - U_2 + h^2 g(U_1), \\ f_i(U) &= -U_{i-1} + 2U_i - U_{i+1} + h^2 g(U_i), \quad 2 \le i \le n-1, \\ f_n(U) &= -U_{n-1} + 2U_n - \beta + h^2 g(U_n). \end{aligned} \qquad (4)$$

Εισάγοντας τον τριδιαγώνιο πίνακα

$$A = [-1, 2, -1] \qquad (5)$$

και τη διαγώνια απεικόνιση $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται για $x = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ ως

$$\Phi(x) = h^2(g(x_1) - \alpha h^{-2}, g(x_2), \ldots, g(x_{n-1}), g(x_n) - \beta h^{-2})^T, \qquad (6)$$

βλέπουμε ότι το σύστημα (3) γράφεται και στη μορφή

$$F(U) \equiv AU + \Phi(U) = 0. \qquad (7)$$

Ερώτημα : Υποθέστε ότι η g' : $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ είναι συνεχής. Δείξτε ότι η απεικόνιση $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη (κατά Frechet) στον $\mathbb{R}^n$ και ότι

$$F'(x) = A + \Phi'(x), \ x \in \mathbb{R}^n, \tag{8}$$

όπου η Φ' είναι η παράγωγος (Frechet) της Φ που παριστάνεται από το **διαγώνιο** Ιακωβιανό πίνακα

$$J_\Phi(x) = h^2 \mathrm{diag}(g'(x_1), \ldots, g'(x_n)), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

2. (Συνέχεια της προηγούμενης.)

(α) Η πιο προφανής μέθοδος για την επίλυση του συστήματος (7) είναι μία **γενική επαναληπτική μέθοδος**. Κατ'αρχήν δείξτε ότι ο A είναι θετικά ορισμένος. Θεωρείστε την απεικόνιση $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$P(x) = -A^{-1}\Phi(x), \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Προφανώς, κάθε λύση του (7) είναι σταθερό σημείο της P και αντίστροφα. Δείξτε ότι αν η g' : $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ είναι συνεχής, τότε η P είναι συνεχώς παραγωγίσιμη κατά (Frechet) στον $\mathbb{R}^n$ και ότι η παράγωγός της δίδεται από $P' = -A^{-1}\Phi'$. Υποθέστε επιπλέον ότι η g' ικανοποιεί τις συνθήκες

$$0 \le g'(s) \le b < \infty, \quad \forall s \in \mathbb{R}^1. \tag{11}$$

Υπολογίζοντας ένα κατάλληλο άνω φράγμα της ευκλείδιας νόρμας $\|P'(x)\|_2$ δείξτε ότι αν

$$b < \pi^2 \tag{12}$$

τότε, για h αρκετά μικρό, η P είναι συστολή (ως προς την νόρμα $\|\cdot\|_2$) στον $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς, η ακολουθία που ορίζεται από την επανάληψη

$$x^{k+1} = P(x^k), \quad k \ge 0, \quad x^0 \in \mathbb{R}^n \text{ αυθαίρετο}, \tag{13}$$

συγκλίνει στο μοναδικό (κάτω από αυτές τις συνθήκες) σταθερό σημείο της P στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή στη μοναδική λύση του (7). (Υπόδειξη: Βρείτε τις ιδιοτιμές του A και υπολογίστε το $\|A^{-1}\|_2$ συναρτήσει του h).

(β) Η συνθήκη (12) και το γεγονός ότι το h πρέπει να είναι αρκετά μικρό (δηλαδή το n αρκετά μεγάλο) για να συγκλίνει η (13) κάνει την επιλογή του $P = -A^{-1}\Phi$ ως απεικόνιση επανάληψης όχι επιτυχή. Υπάρχει όμως η εξής εναλλακτική λύση: Για $\gamma > 0$ σταθερό, θεωρείστε την απεικόνιση $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$G(x) = (A + \gamma I)^{-1}(\gamma x - \Phi(x)), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{14}$$

Προφανώς, κάθε σταθερό σημείο της G είναι λύση του (7) και αντιστρόφως. Υποθέστε ότι η g' είναι συνεχής στον $\mathbb{R}^1$ και ικανοποιεί την (11) για οποιοδήποτε $b > 0$· διαλέξτε $\gamma = h^2 b/2$. Δείξτε τότε ότι η G είναι συστολή (ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|_2$) στον $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς, η επανάληψη $x^{k+1} = G(x^k)$, $k \geq 0$, συγκλίνει για κάθε $x^0 \in \mathbb{R}^n$ στη μοναδική (κάτω από αυτές τις συνθήκες) λύση του (7).

3. (Συνέχεια της προηγούμενης.)
(α) Υποθέστε ότι $g'(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}^1$. Δείξτε ότι ο Ιακωβιανός πίνακας που παριστάνει την παράγωγο $F'(x)$ που δίνεται από την (8) είναι αντιστρέψιμος.

(β) Αποδείξτε ότι η μέθοδος του Νεύτωνα για το μη γραμμικό σύστημα (7) συγκλίνει τοπικά. Δείξτε δηλαδή ότι μία λύση U^* του (7) είναι σημείο έλξης της ακολουθίας της μεθόδου του Νεύτωνα. Υποθέστε ότι η g είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι $g'(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}^1$.

4. Θεωρήστε τη συνάρτηση

$$\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, \quad \phi(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (\beta, x),$$

όπου $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\beta \in \mathbb{R}^n$ και $(\cdot,\cdot)$ το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο.

(α) Πως θα μπορούσατε να "εικάσετε" έναν τύπο για την παράγωγο της ϕ στο x (υπό την προϋπόθεση ότι αυτή υπάρχει);

(β) Δείξτε ότι

$$\phi'(x)y = \frac{1}{2}(Ax, y) + \frac{1}{2}(Ay, x) - (\beta, y), \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

(γ)Αποδείξτε ότι για $x, y \in \mathbb{R}^n$, $(Ay, x) = (A^T x, y)$.

(δ) Δείξτε ότι η $\phi'(x)$ παριστάνεται από το $[\nabla\phi(x)]^T$.

Υποδείξεις

Άσκηση 1

- Πρέπει να αποδειχθεί ότι η Φ' παριστάνεται από τον διαγώνιο πίνακα
$$J_\phi(x) = h^2 \mathrm{diag}(g'(x_1), \ldots, g'(x_n)), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$
- Η ύπαρξη παραγώγου της Φ, F μπορεί να γίνει είτε με τον ορισμό ή με την πρόταση που έχει δοθεί.
- Για τη συνέχεια της F', που ανάγεται στη συνέχεια της Φ', απαιτείται η συνέχεια της g' και η χρήση της $\|\cdot\|_\infty$.

Άσκηση 2

- Πρέπει να επιβεβαιωθεί ότι οι ιδιοτιμές του A είναι $\mu_j = 2(1 - \cos j\pi h)$, $1 \le j \le n$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $(\sin j\pi h, \sin 2j\pi h, \ldots, \sin nj\pi h)$.
- Αρκεί να δειχθεί ότι $\|P'(x)\|_2 < 1$.
- Δεν αρκεί το γενικόλογο "για h αρκετά μικρό".

Άσκηση 3

- Ο αντίστροφος του Ιακωβιανού πίνακα που παριστάνει την παράγωγο $F'(x)$
$$J_F(x) = \begin{pmatrix} 2+h^2g'(x_1) & -1 & & O \\ -1 & 2+h^2g'(x_2) & -1 & \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & -1 \\ O & & -1 & 2+h^2g'(x_n) \end{pmatrix}$$
αποδεικνύεται ότι είναι αντιστρέψιμος ως θετικά ορισμένος.

Άσκηση 4

- Όταν χρησιμοποιείται συμβολισμός, π.χ. $(\bar{A}y, \bar{x})$, πρέπει να επεξηγείται.
- Πρέπει να αποδειχθεί, χρησιμοποιώντας ότι $(Ay, x) = (A^T x, y)$, ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση που $\phi(x) = \frac{1}{2}(Ax, x) - (\beta, x)$, τότε η $\phi'(x)y = \frac{1}{2}(Ax, y) + \frac{1}{2}(Ay, x) - (\beta, y)$, $y \in \mathbb{R}^n$, παριστάνεται από την $[\nabla\phi(x)]^T$.