ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΗΝ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

1. (α) Χρησιμοποιώντας παρεμβολή κατά Newton υπολογίστε το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο p που παρεμβάλλει την f στα $x = 0$ και $x = 1$ και την f' στο $x = 0$. Επίσης, εκφράστε το σφάλμα της παρεμβολής ως προς μία κατάλληλη παράγωγο της f (υπό την προϋπόθεση ότι η παράγωγος αυτή είναι συνεχής στο $[0, 1]$).

   (β) Στηριζόμενοι στο αποτέλεσμα του (α), κατασκευάστε έναν τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης της μορφής

$$\int_0^1 f(x)dx = a_0 f(0) + a_1 f(1) + b_0 f'(0) + E(f).$$

   Υπολογίστε τα a_0, a_1, b_0 και έναν κατάλληλο τύπο για το σφάλμα $E(f)$.

   (γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (β) και έναν κατάλληλο μετασχηματισμό, κατασκευάστε έναν τύπο αριθμητικής ολοκλήρωσης, με τύπο του σφάλματος, για το ολοκλήρωμα $\int_a^{a+h} y(t)dt$, όπου $h > 0$.

2. Δίνεται η μη αρνητική συνάρτηση βάρους w στο διάστημα $[a, b]$. Τα αντίστοιχα ορθογώνια πολυώνυμα με συντελεστή μεγιστοβαθμίου όρου μονάδα $\pi_n(\cdot) = \pi_n(\cdot; w)$ ορίζονται μοναδικά ως εξής:

$$\int_a^b \pi_n(x)\pi_m(x)w(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{αν} \quad n \neq m, \\ c_n & \text{αν} \quad n = m. \end{cases}$$

Είναι γνωστό ότι τα π_n ικανοποιούν έναν αναδρομικό τύπο,

$$\pi_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)\pi_n(x) - \beta_n \pi_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\pi_{-1}(x) = 0, \quad \pi_0(x) = 1,$$

όπου

$$\alpha_n = \frac{\int_a^b x\pi_n^2(x)w(x)dx}{\int_a^b \pi_n^2(x)w(x)dx}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\beta_0 = \int_a^b w(x)dx, \quad \beta_n = \frac{\int_a^b \pi_n^2(x)w(x)dx}{\int_a^b \pi_{n-1}^2(x)w(x)dx}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

   (α) Αν $\|\pi_n\|^2 = \int_a^b \pi_n^2(x)w(x)d(x)$, αποδείξτε ότι

$$\|\pi_n\|^2 = \beta_0\beta_1 \ldots \beta_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

   (β) Αν η w είναι άρτια συνάρτηση και το διάστημα $[a, b]$ είναι συμμετρικό ως προς το 0, αποδείξτε ότι:

      1. $\pi_n(-x) = (-1)^n \pi_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$
         Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τον ορισμό και τη μοναδικότητα των π_n.
      2. $a_n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$

3. Στον αντίστοιχο τύπο του Gauss

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^{n} w_k f(\tau_k) + E_n(f),$$

ισχύει

$$\tau_{n-k+1} = -\tau_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$
$$w_{n-k+1} = w_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

δηλαδή οι κόμβοι είναι συμμετρικοί ως προς το 0 και τα βάρη που αντισοιχούν σε συμμετρικούς κόμβους είναι ίσα.

3. (α) Κατασκευάστε τον τύπο των Gauss-Legendre δύο σημείων

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1 f(\tau_1) + w_2 f(\tau_2) + E_2(f).$$

(β) Δείξτε ότι ο τύπος του προηγούμενου ερωτήματος μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να προσεγγισθεί το ολοκλήρωμα

$$\int_0^1 (1-x)^{-1/2} f(x)dx.$$

Υπόδειξη: Θέσατε $1-x=t^2$.

4. Δίνεται ο τύπος των Newton-Cotes $2n$-σημείων ως προς τη συνάρτηση βάρους w στο διάστημα $[a, b]$

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = \sum_{\nu=1}^{2n} w_\nu f(\tau_\nu) + E_{2n}(f).$$

Να αποδειχθεί ότι, αν για n από τους κόμβους τ_ν επιλεγούν οι ρίζες του ορθογωνίου πολυωνύμου $\pi_n(\cdot; w)$ βαθμού n ως προς τη συνάρτηση βάρους w, τότε ο παραπάνω τύπος γίνεται ο τύπος του Gauss ως προς τη συνάρτηση βάρους w. (Δηλαδή ο τελικός τύπος είναι ανεξάρτητος της επιλογής των υπολοίπων n κόμβων).
Υπόδειξη: Αρκεί να δειχθεί ότι τα βάρη, που αντιστοιχούν στους κόμβους που δεν είναι ρίζες του $\pi_n(\cdot; w)$, είναι ίσα με μηδέν.