Μάθημα 18ο Ε3. Υπολογιστικά Μαθηματικά Ι 10/12/2018

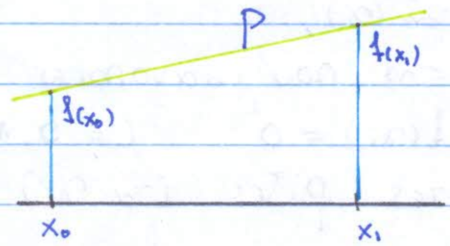
3. Πολυωνυμική προσέγγιση

Πρόβλημα: Δίνονται $n+1$ διακριτά σημεία $x_0, x_1, \dots, x_n$ και οι τιμές μιας συνάρτησης f στα σημεία αυτά. Να βρεθεί πολυώνυμο $p \in \mathbb{P}_n$ έτσι ώστε:

$$p(x_i) = f(x_i) \quad , i = 0, 1, \dots, n.$$

- Υπάρχει λύση; Είναι μοναδική;
- Διαφορετικοί τρόποι παράστασης και υπολογισμού του p
- Μελέτη του σφάλματος $e(x) = f(x) - p(x)$ για $x \neq x_i$, $i = 0, 1, \dots, n$
- Ποιότης της προσέγγισης $f(x) \cong p(x)$ (σύγκλιση) καθώς το n αυξάνεται χωρίς φράγμα ($n \to \infty$)

Απλούστερη (μη τετριμμένη) περίπτωση είναι η γραμμική πολυωνυμική παρεμβολή ($n = 1$)



$$p(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$ πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange

$$p(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$ Πολυώνυμο παρεμβολής Newton

$e(x)$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλο αν δεν έχουμε καμμία πληροφορία για την f

3.1 Πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange

Θεωρούμε τα $n+1$ διακριτά σημεία $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ και τις τιμές μιας συνάρτησης f στα σημεία αυτά. Το πολυώνυμο παρεμβολής Lagrange δίνεται με τη βοήθεια των στοιχειωδών πολυωνύμων του Lagrange

$$\ell_i(x) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}, \quad i=0,1,\dots,n$$

Τα οποία είναι βαθμού (ακριβώς) n για τα οποία ισχύει

$$\ell_i(x_k) = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{αν } i=k \\ 0, & \text{αν } i\neq k \end{cases} \quad i,k=0,1,\dots,n$$

Έτσι ο όρος $f(x_i)\ell_i(x)$ παίρνει την τιμή που θέλουμε στο $x=x_i$ και αν αθροίσουμε όλους αυτούς τους όρους παίρνουμε το πολυώνυμο παρεμβολής

$$p_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\ell_i(x) \quad (3)$$

Πράγματι,

$$p_n(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\ell_i(x_k) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\,\delta_{ik} = f(x_k), \quad k=0,1,\dots,n$$

Αν τώρα υποθέσουμε ότι υπάρχει και ένα άλλο πολυώνυμο p_n^*, βαθμού $\leq n$, για το οποίο ισχύει επίσης $p_n^*(x_i) = f(x_i)$, $i=0,1,\dots,n$

τότε το $d_n(x) = p_n(x) - p_n^*(x)$,

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $\leq n$ που ικανοποιεί

$$d_n(x_i) = p_n(x_i) - p_n^*(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0 \qquad i=0,1,\dots,n$$

Έτσι το d_n έχει $n+1$ διακριτές ρίζες (τα x_i) και άρα $d_n \equiv 0$

$\iff p_n(x) \equiv p_n^*(x)$

Επομένως, το πολυώνυμο παρεμβολής του Lagrange υπάρχει και είναι μοναδικό.

Συμβολισμός. $p_n(f, x_0, x_1, \dots, x_n) = p_n(f,x) = p_n(x)$

Αν τώρα δούμε το πολυώνυμο παρεμβολής σαν ένα μετασχηματισμό

$$P_n : C[\alpha, b] \longrightarrow \mathbb{P}_n, \quad P_n(f) = P_n f = p_n(f,\cdot) \quad (4)$$

Το διάστημα $[\alpha, b]$ είναι ένα οποιοδήποτε διάστημα που περιέχει τα $x_0, x_1, \dots, x_n$. Ο P_n ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $P_n(\alpha f) = \alpha P_n f$, $\alpha \in \mathbb{R}$
2. $P_n(f+g) = P_n f + P_n g$

$\Longrightarrow P_n(\alpha f + b g) = \alpha P_n f + b \cdot P_n g$, $\alpha, b \in \mathbb{R}$ (Γραμμικός μετασχηματισμός)

3. $P_n f = f$ για όλα τα $f \in \mathbb{P}_n$

Ε3. Υπολογιστικά Μαθηματικά Ι

10/12/2018

Η νόρμα του P_n μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$\|P_n\| = \sup_{\substack{f \in C[\alpha,\beta] \\ f \neq 0}} \frac{\|P_n f\|}{\|f\|} \qquad (5)$$

Θεωρώντας ότι οι $C[\alpha,\beta], \mathbb{P}_n$ είναι εφοδιασμένοι με την $\|\cdot\|_\infty$ έχουμε

$$\|P_n f\|_\infty = \|p_n(f,\cdot)\|_\infty = \max_{\alpha\le x\le\beta} |p_n(f,x)| = \max_{\alpha\le x\le\beta} \left|\sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, l_i(x)\right| \le \max_{\alpha\le x\le\beta} \sum_{i=0}^{n} |f(x_i)|\,|l_i(x)|$$

$$\le \max_{\alpha\le x\le\beta} |f(x)| \cdot \max_{\alpha\le x\le\beta} \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)| = \|f\|_\infty \max_{\alpha\le x\le\beta} \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)| \qquad (6)$$

Επιπλέον δε, για κάποιες συνεχείς συναρτήσεις f ισχύει η ισότητα στην (6)
Επομένως, $\|P_n\|_\infty = \Lambda_n$, όπου $\Lambda_n = \|\lambda_n\|_\infty$, $\lambda_n(x) = \sum_{i=0}^{n} |l_i(x)|$ (7)
Η $\lambda_n(x)$ και Λ_n ονομάζονται συνάρτηση και σταθερά του Lebesgue
Συνδέονται δε άμεσα με το σφάλμα της πολυωνυμικής παρεμβολής. Έστω
$E_n(f) = \min_{p\in\mathbb{P}_n} \|f-p\|_\infty = \|f-p_n^*\|_\infty$ (βέλτιστη προσέγγιση της f με πολυώνυμα βαθμού $\le n$)

Τότε, $\|f-p_n(f,\cdot)\|_\infty = \|f-p_n^*+p_n^*-p_n(f,\cdot)\|_\infty \overset{?\,(\text{Άσκηση})}{=} \|f-p_n^*-p_n(f-p_n^*,\cdot)\|_\infty$

$\le \|f-p_n^*\|_\infty + \|p_n(f-p_n^*,\cdot)\|_\infty \overset{(6)}{\le} \|f-p_n^*\|_\infty + \Lambda_n\|f-p_n^*\|_\infty$,

δηλαδή $\|f-p_n(f,\cdot)\|_\infty \le (1+\Lambda_n)E_n(f)$ (8)

Άρα, όσο πιο μικρό είναι το $E_n(f)$, τόσο πιο μικρό είναι και το $\|f-p_n(f,\cdot)\|_\infty$
Δυστυχώς το Λ_n **δεν** είναι φραγμένο. Συγκεκριμένα, ανεξάρτητα από την επιλογή των $x_i = x_i^{(n)}$ $i=0,1,\dots,n$, μπορούμε να δείξουμε ότι
$\Lambda_n > O(\log n)$ καθώς $n \longrightarrow \infty$
Επομένως, το Θεώρημα του Weierstrass ($E_n f \longrightarrow 0$ καθώς $n\to\infty$) δεν μπορεί να δώσει σύγκλιση της πολυωνυμικής παρεμβολής Lagrange ομοιόμορφα στο $[\alpha,\beta]$ για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις
Μάλιστα αυτό δεν ισχύει!