Προσέγγιση συναρτήσεων με ομαλοποιητές

Θέτουμε
$$\rho(x) = \begin{cases} C\exp(-\frac{1}{1-|x|^2}), & |x|<1, \\ 0, & |x|\geq 1, \end{cases}$$
όπου η σταθερά C επιλέγεται έτσι ώστε $\int \rho(x)dx = 1$.

Για $\epsilon > 0$ ορίζουμε στη συνέχεια

$$\rho_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\rho(x/\epsilon)\ , \quad x\in\mathbb{R}^n$$

Η οικογένεια συναρτήσεων (ρ_ϵ) ονομάζεται ομαλοποιητής και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \rho_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \text{(ii)} & \mathrm{supp}(\rho_\epsilon) = \overline{B}(0,\epsilon) \\ \text{(iii)} & \rho_\epsilon \text{ ακτινικά συμμετρική} \\ \text{(iv)} & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}\rho_\epsilon(x)dx = 1 \end{array}$$

Έστω $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ ανοικτό και συνεκτικό. Για $\epsilon>0$ ορίζουμε

$$\Omega_\epsilon = \{x\in\Omega\ :\ \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)>\epsilon\}$$

και
$$\Omega^\epsilon = \{x\in\mathbb{R}^n\ :\ \mathrm{dist}(x,\Omega)<\epsilon\}.$$

Έστω $u\in L^1_{loc}(\Omega)$. Ορίζουμε

$$u_\epsilon(x) = \int_\Omega \rho_\epsilon(x-y)u(y)dy = \int_{|y-x|<\epsilon}\rho_\epsilon(x-y)u(y)dy\ , \qquad x\in\Omega_\epsilon.$$

Ισοδύναμα, επεκτείνοντας την u θέτοντάς την ίση με μηδέν στο $\mathbb{R}^n\setminus\Omega$, έχουμε

$$u_\epsilon = (\rho_\epsilon * u)\big|_{\Omega_\epsilon}\,.$$

όπου $f*g$ συμβολίζει τη συνέλιξη συναρτήσεων. Συνέπεια τις ανισότητας Young και του ότι $\|\rho_\epsilon\|_{L^1}=1$ είναι ότι αν $u\in L^p(\Omega)$ τότε $u_\epsilon\in L^p(\Omega_\epsilon)$ και

$$\|u_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\,. \tag{0.1}$$

Πρόταση Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Ισχύουν τα εξής:

(i) $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$

(ii) Αν $u \in C^k(\Omega)$ τότε $D^\alpha u_\epsilon = (D^\alpha u)_\epsilon$ για κάθε πολυδείκτη α με $|\alpha| \leq k$

(iii) Αν $u \in C(\Omega)$ τότε $u_\epsilon \to u$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω

(iv) Αν $u \in C^k(\Omega)$ τότε $D^\alpha u_\epsilon \to D^\alpha u$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω για κάθε πολυδείκτη α με $|\alpha| \leq k$

(v) Αν $u \in L^p(\Omega)$ τότε $\|u_\epsilon - u\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \to 0$.
Ειδικότερα $u_\epsilon \to u$ στον $L^p(U)$ για κάθε $U \subset\subset \Omega$.

Απόδειξη. (i) Θα δείξουμε αρχικά ότι

$$\frac{\partial u_\epsilon}{\partial x_k}(x) = \int_{|y-x|<\epsilon} \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial x_k}(x-y)u(y)dy, \quad x \in \Omega_\epsilon.$$

Έστω $x \in \Omega_\epsilon$ και δ αρκετά μικρό ώστε $B(x, |\delta|) \subset \Omega_\epsilon$. Ορίζουμε

$$A(\delta) := \frac{1}{\delta}\left(u_\epsilon(x+\delta e_k) - u_\epsilon(x) - \delta \int_{|y-x|<\epsilon} \frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial x_k}(x-y)u(y)dy \right)$$

και αρκεί να δείξουμε ότι $A(\delta) \to 0$ καθώς $\delta \to 0$.

Έχουμε λοιπόν

$$A(\delta) = \frac{1}{\delta}\int_{|y-x|<\epsilon} \Big[\rho_\epsilon(x+\delta e_k - y) - \rho_\epsilon(x-y) - \delta\frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial x_k}(x-y)\Big] u(y)dy \, .$$

Όμως, από τον τύπο του Taylor έχουμε για κάθε $y \in B(x,\epsilon)$,

$$\rho_\epsilon(x+\delta e_k - y) = \rho_\epsilon(x-y) + \delta\frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial x_k}(x-y) + \frac{1}{2}\delta^2 \mathrm{Hess}\rho_\epsilon(\xi_y)e_k \cdot e_k \, ,$$

για κάποιο σημείο $\xi_y \in [x-y, x-y+\delta e_k]$. Έστω $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|\mathrm{Hess}\rho_\epsilon\| \leq M$ (νόρμα πίνακα θεωρουμένου ως τελεστή στο $\mathbb{R}^n$). Έχουμε τότε

$$\Big| \rho_\epsilon(x+\delta e_k - y) - \rho_\epsilon(x-y) - \delta\frac{\partial \rho_\epsilon}{\partial x_k}(x-y)\Big| = \frac{1}{2}\delta^2 \big|\mathrm{Hess}\rho_\epsilon(\xi_y)e_k \cdot e_k\big| \leq \frac{M\delta^2}{2}.$$

Άρα

$$|A(\delta)| \leq \frac{1}{|\delta|}\frac{M\delta^2}{2}\int_{|y-x|<\epsilon} |u(y)|dy \ \longrightarrow 0 \, ,$$

καθώς $\delta \to 0$, και το ζητούμενο έπεται.

Παρόμοια αποδεικνύεται η ύπαρξη παραγώγων κάθε τάξης: ισχύει γενικά

$$(D^\alpha u_\epsilon)(x) = \int_{|y-x|<\epsilon} (D^\alpha \rho_\epsilon)(x-y)\, u(y)dy \tag{0.2}$$

για κάθε πολυδείκτη $\alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$. Άρα λοιπόν $u_\epsilon \in C^\infty(\Omega_\epsilon)$.

(ii) Ολοκλήρωση κατά παράγοντες μας δίνει

$$\int_{|y-x|<\epsilon} (D^\alpha \rho_\epsilon)(x-y)\, u(y)dy = \int_{|y-x|<\epsilon} \rho_\epsilon(x-y)\, (D^\alpha u)(y)dy = (D^\alpha u)_\epsilon(x),$$

οπότε τα ζητούμενο έπεται από την (0.2).

(iii) Έστω $U \subset\subset \Omega$. Έστω $\eta = \frac{1}{2}\mathrm{dist}(U, \partial\Omega)$. Τότε $U^\eta \subset\subset \Omega$ και άρα η u είναι ομοιόμορφα συμπαγής στο U^η.

Έστω $\epsilon < \eta$. Για $x \in U$ έχουμε τότε

$$\begin{aligned} |u_\epsilon(x) - u(x)| &\leq \int_{B(\epsilon)} \rho_\epsilon(y) \big|u(x-y) - u(x)\big| dy \\ &\leq \sup_{x\in U} \sup_{y \in B(\epsilon)} \big|u(x-y) - u(x)\big| \\ &\leq \sup_{x,x' \in U^\eta, |x-x'|<\epsilon} \big|u(x') - u(x)\big| \\ &\to 0, \end{aligned}$$

λόγω της ομοιόμορφης συνέχειας της u στο σύνολο U^η.

(iv) Έπεται από τις (ii) και (iii)

(v) Έστω $u \in L^p(\Omega)$ και $\delta > 0$. Είναι γνωστό από την Πραγματική Ανάλυση ότι υπάρχει συνάρτηση $v \in C_c(\Omega)$ τέτοια ώστε

$$\|u - v\|_{L^p(\Omega)} < \frac{\delta}{3}.$$

Έστω $K = \mathrm{supp}(v)$

Για τη συνάρτηση v θεωρούμε τις αντίστοιχες ομαλοποιημένες συναρτήσεις v_ϵ. Τότε, από το (iii),

$$v_\epsilon \to v, \text{ ομοιόμορφα στο } K^\eta,$$

για κάθε $\eta < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(v), \partial\Omega)$ (αφού $K^\eta \subset\subset \Omega$).

Συνεπώς για $\epsilon < \eta < \mathrm{dist}(\mathrm{supp}(v), \partial\Omega)$, επειδή οι v, v_ϵ μηδενίζονται εκτός του K^η,

$$\|v_\epsilon - v\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} = \|v_\epsilon - v\|_{L^p(K^\eta)} \leq \|v_\epsilon - v\|_{L^\infty(K^\eta)} |K^\eta|^{1/p}$$

και άρα

$$\|v_\epsilon - v\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} < \frac{\delta}{3},$$

αν το ϵ είναι αρκετά μικρό.

Συνεπώς για αρκετά μικρά $\epsilon > 0$, χρησιμοποιώντας και την (0.1) έχουμε

$$\begin{aligned}
\|u_\epsilon - u\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} &\leq \|u_\epsilon - v_\epsilon\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} + \|v_\epsilon - v\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} + \|v - u\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \\
&\leq 2\|v - u\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} + \|v_\epsilon - v\|_{L^p(\Omega_\epsilon)} \\
&\leq \delta,
\end{aligned}$$

και άρα αποδείχθηκε το ζητούμενο. $\square$