Μάθημα 5º Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 4/3/2013

Πρόταση: Ένας χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν περιέχει μια (αριθμήσιμη) ορθοκανονική βάση.

Απόδειξη:

Ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt

Ορισμός: Μια απεικόνιση $U: \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ λέγεται ισομορφισμός χώρων Hilbert αν είναι 1-1 και επί, γραμμική και $\langle Ux, Uy \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}_1}$.

Λέμε επίσης ότι ο U είναι μοναδιαίος τελεστής.

Πρόταση: Δύο διαχωρίσιμοι, απειροδιάστατοι χώροι Hilbert είναι ισόμορφοι μεταξύ τους.

Απόδειξη:

Θα δείξουμε ότι αν $\mathcal{H}$ απειροδιάστατος διαχωρίσιμος, τότε ο $\mathcal{H}$ είναι ισόμορφος με τον ℓ^2

Έστω $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$

Ορίζουμε $U: \mathcal{H} \longrightarrow \ell^2$ ως εξής: $(Ux)_n = \langle x, e_n \rangle$

δηλαδή $Ux = (\langle x, e_1 \rangle, \langle x, e_2 \rangle, \dots)$

Άσκηση: Να δειχθεί ότι U ισομορφισμός

(ο $U^{-1}: \ell^2 \longrightarrow \mathcal{H}$ δίνεται από $U^{-1}(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n$)

2. Τελεστές σε χώρους Hilbert

Ορισμός: Έστω $\mathcal{H}, \mathcal{F}$ χώροι Hilbert. Μια γραμμική απεικόνιση $T: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}$ ονομάζεται γραμμικός τελεστής.

Ορισμός: Πυρήνας του T, $Ker(T) := \{x \in \mathcal{H} : Tx = 0\}$

Εικόνα του T, $Ran(T) := \{Tx : x \in \mathcal{H}\}$

Πρόταση: Έστω $T: \mathcal{H} \to \mathcal{F}$ ένας γραμμικός τελεστής, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) ο T είναι Lipschitz συνεχής

(ii) T συνεχής στο 0

(iii) Υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $\|Tx\| \leq M \cdot \|x\|$, $x \in \mathcal{H}$

Απόδειξη:

T Lipschitz συνεχής $\overset{op}{\iff} \exists\, M > 0$ τω. $\|Tx - Ty\| \leq M\|x-y\|$, $x, y \in \mathcal{H}$

(i) $\Rightarrow$ (ii) προφανές

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Αφού T συνεχής στο 0 και $T0 = 0$, υπάρχει $\delta > 0$ τω αν $\|x\| < \delta$ τότε $\|Tx\| < 1$

Έστω $x \in \mathcal{H}$. Τότε $\left\| \frac{\delta x}{2\|x\|} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$ άρα

$\left\| T\left(\frac{\delta x}{2\|x\|} \right) \right\| < 1 \quad \Rightarrow \|Tx\| \leq \frac{2}{\delta}\|x\|$

Άρα με $M = 2/\delta$ έχουμε το ζητούμενο

(iii) $\Rightarrow$ (i) Έστω $x, y \in \mathcal{H}$ τότε $\|Tx - Ty\| = \|T(x-y)\| \leq M\|x-y\|$

Ορισμός: Ένας τελεστής T για τον οποίο ισχύουν οι (i)-(iii) λέγεται φραγμένος

$\mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F}): \{ T: \mathcal{H} \to \mathcal{F},\ T \text{ φραγμένος} \}$

Ορισμός: Για κάθε $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$ ορίζουμε

$\|T\| = \inf\{ M \geq 0 : \|Tx\| \leq M \cdot \|x\| \ \ \forall\, x \in \mathcal{H} \}$.

Πρόταση: Ισχύει ότι

$$
\begin{aligned}
\|T\| &= \min\{ M \geq 0 : \|Tx\| \leq M \cdot \|x\| \ \ \forall\, x \in \mathcal{H} \} \\
&= \min\{ M \geq 0 : \|Tx\| \leq M \ \ \forall\, x \text{ τω } \|x\| \leq 1 \} \\
&= \min\{ M \geq 0 : \|Tx\| \leq M \ \ \forall\, x \text{ τω } \|x\| = 1 \} \\
&= \sup\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|},\ x \in \mathcal{H},\ x \neq 0 \right\} = \sup\{ \|Tx\| \ x \in \mathcal{H},\ \|x\| \leq 1 \} \\
&= \sup\{ \|Tx\| : x \in \mathcal{H},\ \|x\| = 1 \}
\end{aligned}
$$

Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση — 4/3/2019

Παρατήρηση: Άρα για να δείξουμε ότι π.χ. $\|T\| = 5$, πρέπει να δείξουμε ότι $\|Tx\| \leq 5 \ \forall x \in H$ και αντί του 5 βάλουμε κάτι μικρότερο π.χ. $5-\varepsilon$ τότε η σχέση δεν ισχύει για όλα τα $x \in H$

Παραδείγματα

1 Έστω $k(t,s)$, $t,s \in (0,1)$ τω $|k(t,s)| \leq M \ \forall t,s \in (0,1)$ να δειχθεί ότι ο τελεστής

$$(Tf)(t) = \int_0^1 k(t,s) f(s)\, ds, \quad f \in L^2(0,1)$$

(ολοκληρωτικός τελεστής) $\rightarrow$ ολοκληρωτικός πυρήνας

είναι φραγμένος

Έστω $f \in L^2(0,1)$, τότε

$$\|Tf\|^2 = \int_0^1 |Tf(t)|^2 dt = \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t,s) f(s)\, ds \right|^2 dt$$

$$\leq M^2 \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(s)|\, ds \right)^2 dt = M^2 \left(\int_0^1 |f(s)|\, ds \right)^2$$

$$\overset{CS}{\leq} M^2 \cdot \int_0^1 |f(s)|^2 dt = M^2 \|f\|^2$$

Άρα T φραγμένος και $\|T\| \leq M$.

2 Ορίζουμε $\ell^\infty = \{ (\alpha_n)_{n=1}^\infty : (\alpha_n \text{ φραγμένη}) \}$ με νόρμα

$$\|(\alpha_n)_{n=1}^\infty\|_{\ell^\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|$$

Έστω $\alpha \in \ell^\infty$ και $A : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ $A(x_1, x_2, \dots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$

να δειχθεί ότι A φραγμένος και $\|A\| = \|\alpha\|_{\ell^\infty}$

Έστω $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in \ell^2$ τότε

$$\|Ax\|^2 = \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n x_n|^2 \leq \|\alpha\|_{\ell^\infty} \cdot \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 = \|\alpha\|_{\ell^\infty}^2 \|x\|^2$$

Άρα $\|A\| \leq \|\alpha\|_{\ell^\infty}$

Για να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα αρκεί να δείξουμε ότι $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in \ell^2$ τω $\|Ax\| \geq (\|\alpha\|_{\ell^\infty} - \varepsilon) \|x\|$

Έστω λοιπόν $\varepsilon > 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τω $|\alpha_{n_0}| > \|\alpha\|_{\ell^\infty} - \varepsilon$

Τότε $\|Ae_{n_0}\| = \|(0,0,\dots,\alpha_{n_0},0,\dots)\| = |\alpha_{n_0}| > (\|\alpha\|_\infty - \varepsilon)\|e_{n_0}\|$

$$\left(\text{ή } \|A\| = \sup_{\substack{x \in \ell^2 \\ x \neq 0}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} \geq \frac{\|Ae_{n_0}\|}{\|e_{n_0}\|} = |\alpha_{n_0}| > \|\alpha\|_\infty - \varepsilon \right)$$

Πρόταση: Το $\|\cdot\|$ είναι νόρμα στον $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$

Απόδειξη:

(i) $\|T\| \geq 0 \quad \forall\, T$ ισχύει

Έστω $\|T\|=0$ τότε $0=\|T\| = \sup\left\{ \frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x\in\mathcal{H}, x\neq 0\right\}$ άρα $Tx=0 \quad \forall\, x\in\mathcal{H}$. Άρα $T=0$.

(ii) $\|\lambda T\| = \sup\left\{ \frac{\|\lambda Tx\|}{\|x\|} : x\in\mathcal{H}, x\neq 0\right\} = |\lambda|\cdot\|T\|$

(iii) Έστω $T, S \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$. Έστω $x\in\mathcal{H}$ τότε

$\|(T+S)x\| = \|Tx+Sx\| \leq \|Tx\| + \|Sx\| \leq \|T\|\,\|x\| + \|S\|\,\|x\| = (\|T\|+\|S\|)\,\|x\|$

Άρα $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$