Μάθημα 10ο   Εϕ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση   27/3/2019

Άσκηση: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα φάσματα των τελεστών S, S^* στον ℓ^2 (δεξιά και αριστερή μετατόπιση)

Πρόταση: Έστω $T: \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ συμπαγής όπου $\dim \mathcal{H} = \infty$, τότε:
(i) Κάθε μη-μηδενική ιδιοτιμή του T έχει πεπερασμένη πολλαπλότητα
(ii) $0 \in \sigma(T)$

Απόδειξη:
(i) Έστω $\lambda \neq 0$ ιδιοτιμή του T. Και έστω αντίθετα, ότι $\dim \mathrm{Ker}(T-\lambda I) = \infty$. Έστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathrm{Ker}(T-\lambda I)$. Τότε η (Te_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Όμως $\|Te_n - Te_m\| = \|\lambda e_n - \lambda e_m\|$ $= |\lambda| \, \|e_n - e_m\| = \sqrt{2}\, |\lambda|$ και άρα η (Te_n) δεν έχει Cauchy υπακολουθία
(ii) Έστω αντίθετα ότι $0 \notin \sigma(T)$. Άρα υπάρχει ο $T^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Ισχύει λοιπόν $T\, T^{-1} = T^{-1} T = I$ (γινόμενο συμπαγή με φραγμένο $\longrightarrow$ συμπαγής) και άρα I συμπαγής. Άτοπο

Τελεστές Hilbert-Schmidt

Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}, \mathcal{F})$. Έστω (e_n) ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ και (f_k) μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{F}$. Τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\langle Te_n, f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\langle e_n, T^* f_k \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|T^* f_k\|^2$$

Άρα το $\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2$ είναι ανεξάρτητο της ορθοκανονικής βάσης (e_n) του $\mathcal{H}$.

Ορισμός: Η ποσότητα $\|T\|_{HS} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2}$ ονομάζεται Hilbert-Schmidt νόρμα του T.
Αν $\|T\|_{HS} < +\infty$, τότε ο T λέγεται τελεστής Hilbert-Schmidt.

Παράδειγμα: Αν $\dim \mathcal{H} < +\infty$ ή $\dim \mathcal{F} < +\infty$ τότε ο T είναι H-S

Άσκηση: Να δειχθεί ότι ο χώρος όλων των τελεστών Hilbert-Schmidt είναι γραμμικός υπόχωρος του $\mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$ και η $\|\cdot\|_{HS}$ είναι νόρμα στον χώρο αυτό.

Πρόταση: Αν ο T είναι Hilbert-Schmidt τότε είναι συμπαγής.

Απόδειξη:

Έστω (e_n) μια ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$. Για κάθε $x \in \mathcal{H}$ έχουμε

$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ άρα $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle Te_n$

Για $r \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $T_r x = \sum_{n=1}^{r} \langle x, e_n \rangle Te_n = TP_r x$

$\left(P_r x = \sum_{n=1}^{r} \langle x, e_n \rangle e_n = \right.$ προβολή στο $\left. \{e_1, \dots, e_r\} \right)$

Κάθε T_r είναι πεπερασμένης τάξης και άρα συμπαγής.

Έστω $x \in \mathcal{H}$ τότε

$$\|Tx - T_r x\| = \left\| \sum_{n=r+1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle Te_n \right\| \leq \sum_{n=r+1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle| \, \|Te_n\|$$

$$\overset{CS}{\leq} \left(\sum_{n=r+1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \underbrace{\left(\sum_{n=r+1}^{\infty} \|Te_n\|^2 \right)^{1/2}}_{A_r} \leq \|x\| \cdot A_r$$

Άρα $\|T - T_r\| \leq A_r \longrightarrow 0$

ουρά συγκλίνουσας σειράς.

Άρα $T_r \longrightarrow T$, και λόγω της κλειστότητας του χώρου των συμπαγών τελεστών T συμπαγής.

Παρατήρηση: Έστω (T_n), $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H},\mathcal{F})$ λέμε ότι

(i) $T_n \longrightarrow T$ κατά νόρμα αν $\|T_n - T\| \longrightarrow 0$

(ii) $T_n \longrightarrow T$ ισχυρά αν $T_n x \longrightarrow Tx$, $\forall x \in \mathcal{H}$

(iii) $T_n \longrightarrow T$ ασθενώς αν $\langle T_n x, y \rangle \longrightarrow \langle Tx, y \rangle$ $\forall x \in \mathcal{H}$ και $\forall y \in \mathcal{F}$

Προφανώς Κατά νόρμα σύγκλιση $\Longrightarrow$ Ισχυρή σύγκλιση $\Longrightarrow$ Ασθενής σύγκλιση.

$\left(|\langle T_n x, y \rangle - \langle Tx, y \rangle| \leq \|T_n x - Tx\| \cdot \|y\| \leq \|T_n - T\| \right)$

Τα αντίστροφα δεν ισχύουν

Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 27/3/2019

Άσκηση: (i) Έστω $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ ορθοκανονική βάση του $\mathcal{H}$ και P_n = ορθογώνια προβολή στο $\text{lin}\{e_1, \dots, e_n\}$

Να δειχθεί ότι $P_n \to I$ ισχυρά, αλλά όχι κατά νόρμα

(ii) Στον ℓ^2 έστω S ο τελεστής της δεξιάς μετατόπισης

Να δειχθεί ότι $S^n \to 0$ ασθενώς αλλά όχι ισχυρά

Πρόταση: Στον $L^2(\Omega)$ $(\Omega \subseteq \mathbb{R}^n)$, έστω ο ολοκληρωτικός τελεστής

$$(Ku)(x) = \int_\Omega k(x,y)\, u(y)\, dy$$

Αν $k \in L^2(\Omega \times \Omega)$ δηλαδή $\iint_\Omega |k(x,y)|^2 dx\, dy < +\infty$

τότε ο K είναι Hilbert-Schmidt

Απόδειξη.

Για $x \in \Omega$ ορίζουμε $k_x(y) = k(x,y)$

Έστω (e_n) μια ορθοκανονική βάση του $L^2(\Omega)$

Για $x \in \Omega$

$$(Ke_n)(x) = \int_\Omega k(x,y)\, e_n(y)\, dy = \langle k_x, \bar{e}_n \rangle$$

Άρα $\|Ke_n\|^2 = \int_\Omega |Ke_n(x)|^2 dx = \int_\Omega |\langle k_x, \bar{e}_n\rangle|^2 dx$ και άρα

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ke_n\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega |\langle k_x, \bar{e}_n\rangle|^2 dx = \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} |\langle k_x, \bar{e}_n\rangle|^2 dx = \int_\Omega \|k_x\|^2 dx = \int_\Omega \int_\Omega |k_x(y)|^2 dy\, dx =$$

$$= \int_\Omega \int_\Omega |k(x,y)|^2 dx\, dy < +\infty \qquad \text{Άρα } K \text{ H-S.}$$

Φασματικό Θεώρημα για συμπαγείς αυτοσυζυγείς τελεστές.

Ορισμός: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ και M κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{H}$

(i) λέμε ότι ο T αφήνει τον M αναλλοίωτο αν.

$$x \in M \Rightarrow Tx \in M \qquad (\text{γράφουμε } TM \subset M)$$

(ii) λέμε ότι ο T ανάγει τον M αν αφήνει τους $M, M^\perp$ αναλλοίωτους.

Παρατήρηση: Έστω $x \in \mathcal{H}$, $y = Tx$ τότε:

$x = x_1 \oplus x_2$ όπου $x_1, y_1 \in M$

$y = y_1 \oplus y_2$ $\qquad x_2, y_2 \in M^\perp$

Γράφουμε $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Ορίζονται τότε τελεστές A, B, C, D τέτοιοι ώστε

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

δηλαδή $Tx = y_1 \oplus y_2 = (Ax_1 + Bx_2) \oplus (Cx_1 + Dx_2)$

Άρα ως προς την ανάλυση $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$ ο T αναπαρίσταται ως $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$

Εδώ

$A: M \to M$

$B: M^\perp \to M$

$C: M \to M^\perp$

$D: M^\perp \to M^\perp$

Ο T ανάγει τον M αν και μόνο αν $B = 0$, $C = 0$

οπότε $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{bmatrix}$ "διαγώνιος" (block διαγώνιος)

Έστω P η ορθογώνια προβολή στον M (άρα $I-P$ η ορθογώνια προβολή στον $M^\perp$)

Τότε ο T αφήνει τον M αναλλοίωτο αν και μόνο αν $x \in M \Rightarrow Tx \in M$

δηλαδή $\underbrace{x = Px \Rightarrow PTx = Tx}_{B}$ δηλαδή $\underbrace{PTP = TP}_{A}$

$A \Rightarrow B$: Έστω x ι.τ.ω $x = Px$ τότε $PTx = PTPx = TPx = Tx$.

$B \Rightarrow A$: Έστω $x \in \mathcal{H}$ $Px = PPx$ άρα $PTPx = TPx$. Άρα ισχύει το A.

Άρα ο T ανάγει τον M αν και μόνο αν $PTP = TP$ και $(I-P)T(I-P) = T(I-P)$

$\Leftrightarrow (I-P)TP = 0$ και $PT(I-P) = 0$.

Έχουμε

$$\begin{array}{rll} T = [P + (I-P)]\,T\,[P + (I-P)] = & PTP & A \\ 0 \leftarrow \Big\{ & PT(I-P) & B \\ & (I-P)TP & C \\ & (I-P)T(I-P) & D \end{array}$$