Μάθημα 11ο   Εφ. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση   1/4/2019

Παρατηρήσεις

1 Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον $L^2(\Omega)$

$(Tf)(x) = h(x)f(x)$, όπου $h \in C(\Omega)$ φραγμένη, τότε

(i) $\|T\| = \sup_{\Omega}|h|$

(ii) $\sigma(T) = \overline{\operatorname{Ran} h}$

$\|T\| \geq \sup|h| = M$ Έστω $\varepsilon > 0$, $\exists\, x_0 \in \Omega$ τ.ω $|h(x_0)| > M - \varepsilon/2$

Λόγω συνέχειας της h στο x_0 υπάρχει $\delta > 0$ τω αν $|x - x_0| < \delta$

τότε $|h(x) - h(x_0)| < \varepsilon/2$. Άρα αν $|x - x_0| < \delta$ τότε

$|h(x)| \geq |h(x_0)| - |h(x) - h(x_0)| > M - \varepsilon$

Έστω $\underset{\in L^2}{\chi(x)} = \chi_{B(x_0,\delta)}(x)$ τότε $\|T\| \geq \dfrac{\|T\chi\|}{\|\chi\|} > \dots$

2 Πολλαπλασιαστικοί τελεστές στον ℓ^2

Έστω $(\alpha_n) \in \ell^2$ και A ο αντίστοιχος πολλαπλασιαστικός τελεστής.

$A(x_1, x_2, \dots) = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots)$ τότε

(i) $\|A\| = \sup|\alpha_n| = \|\alpha\|_{\ell^\infty}$

(ii) $\sigma(A) = \overline{\{\alpha_1, \alpha_2, \dots\}}$ (Άσκηση)

Άσκηση 9: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και το φάσμα των τελεστών της δεξιάς και αριστερής μετατόπισης S και S^* στον ℓ^2.

$S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$

$S^*(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$

Λύση:

Έχουμε $\|S\| = \|S^*\| = 1$ άρα $\sigma(S), \sigma(S^*) \subseteq \overline{D(1)}$

Έστω $\lambda \in \overline{D(1)}$. Έχουμε $Sx = \lambda x \iff$

$(0, x_1, x_2, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) \iff$

$\begin{cases} 0 = \lambda x_1 \\ x_1 = \lambda x_2 \\ x_2 = \lambda x_3 \\ \vdots \end{cases}$

(i) $\lambda = 0$ τότε $x = 0$. Άρα $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή

(ii) $\lambda \neq 0$ τότε $x = 0$ άρα $x = 0$

Άρα ο S δεν έχει ιδιοτιμές

Έστω $S^*x = \lambda x \iff (x_2, x_3, \dots) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots) \iff$

$$\begin{cases} x_2 = \lambda x_1 \\ x_3 = \lambda x_2 \\ x_4 = \lambda x_3 \\ \vdots \end{cases}$$

Άρα $x = (x_1, \lambda x_1, \lambda^2 x_2, \dots) = x_1 (1, \lambda, \lambda^2, \dots) = x_1 \cdot v_\lambda$

πρέπει $v_\lambda \in \ell^2$, άρα πρέπει (και αρκεί) $|\lambda| < 1$

Άρα κάθε $\lambda \in D(1)$ είναι ιδιοτιμή και $Ker(S^* - \lambda) = \langle v_\lambda \rangle$

$\sigma(S^*) = \overline{\sigma(S)}$

Άρα $D(1) \subset \sigma(S^*) \subset \bar{D}(1)$

Αφού $\sigma(S^*)$ κλειστό, $\sigma(S^*) = \overline{D(1)}$

Άρα $\sigma(S) = \overline{\sigma(S^*)} = \overline{D(1)}$

Λήμμα: Αν T αυτοσυζυγής τότε $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$

Απόδειξη:

Θέτω $M = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$

- Έστω $x \in \mathcal{H}$, $\|x\| = 1$ τότε $|\langle Tx, x\rangle| \le \|Tx\| \cdot \|x\| \le \|T\| \cdot \|x\|^2 = \|T\|$. Άρα $M \le \|T\|$
- Έστω $x, y \in \mathcal{H}$. Τότε

$\langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle = \dots = 2\langle Tx, y\rangle + 2\langle Ty, x\rangle =$

$= 2\langle Tx, y\rangle + 2\langle y, Tx\rangle = 4\, Re\langle Tx, y\rangle$

Άρα $4|Re\langle Tx, y\rangle| \le |\langle T(x+y), x+y\rangle| + |\langle T(x-y), x-y\rangle|$

Ξέρουμε ότι $|\langle Tx, x\rangle| = \|x\|^2 \langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\rangle| \le M\|x\|^2$, άρα

$4|Re\langle Tx, y\rangle| \le M\|x+y\|^2 + M\|x-y\|^2 = 2M(\|x\|^2 + \|y\|^2)$

άρα αν $\|x\|, \|y\| < 1$ τότε $|Re\langle Tx, y\rangle| \le M$

και άρα $|Re\langle Tx, y\rangle| \le M\|x\|\|y\|$

(διότι $|Re\langle T\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\rangle| \le M$). Επιλέγουμε $y = Tx$ και έχουμε

$\|Tx\|^2 \le M\|x\|\,\|Tx\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$

$\|Tx\| \le M\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H} \implies \|T\| \le M.$

Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 1/4/2019

Λήμμα: Έστω $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ συμπαγής και αυτοσυζυγής. Τότε ένα τουλάχιστον από τα $\|T\|, -\|T\|$ είναι ιδιοτιμή του T.

Απόδειξη:

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T \neq 0$. Αφού $\|T\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Tx, x\rangle|$
άρα υπάρχει ακολουθία $(x_n) \subset \mathcal{H}$ με $\|x_n\| = 1$ τ.ω
$|\langle Tx_n, x_n\rangle| \longrightarrow \|T\|$

Ειδικότερα η $(\langle Tx_n, x_n\rangle)$ είναι φραγμένη (στο $\mathbb{R}$)
Άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\langle Tx_{n_k}, x_{n_k}\rangle \longrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$
Τότε $|\lambda| = \|T\|$ δηλαδή $\lambda = \|T\|$ ή $-\|T\|$
Θα δείξουμε ότι λ ιδιοτιμή του T
Γράφουμε (x_n) αντί για (x_{n_k})
Έχουμε
$$\|Tx_n - \lambda x_n\|^2 = \|Tx_n\|^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + |\lambda|^2$$
$$\leq \|T\|^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle + \lambda^2$$
$$= 2\lambda^2 - 2\lambda\langle Tx_n, x_n\rangle \longrightarrow 2\lambda^2 - 2\lambda\lambda = 0$$

Αφού T συμπαγής η (Tx_n) έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η Tx_n συγκλίνει $Tx_n \to y$
Άρα $\lambda x_n = Tx_n + (\lambda x_n - Tx_n) \longrightarrow y + 0 = y$
Άρα $x_n \longrightarrow \frac{1}{\lambda} y$ Άρα $Ty = T(\lim \lambda x_n) = \lambda \lim Tx_n = \lambda y$
Ισχύει $\|y\| = \lim \|\lambda x_n\| = |\lambda| \neq 0$ άρα $y \neq 0$. Άρα λ ιδιοτιμή

Άσκηση 8: Έστω $h \in L^\infty(\Omega)$ ($\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό) και $T : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$
$(Tf)(x) = h(x) f(x)$
Να δειχθεί ότι (i) $\|T\| = \|h\|_{L^\infty} = \operatorname{ess\,sup}|h| = \inf\{M > 0 : |h(x)| \leq M \text{ σ.π. στο } \Omega\}$
(ii) $\sigma(T) = \operatorname{ess\,ran}(h) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{meas}\{x \in \Omega : |h(x) - \lambda| < \varepsilon\} > 0, \ \forall \varepsilon > 0\}$.

Λύση:

(i) Έστω $f \in L^2(\Omega)$ τότε $\|Tf\|^2 = \int_\Omega |h(x) f(x)|^2 dx \leq \int_\Omega \|h\|_{L^\infty}^2 |f(x)| dx$
$= \|h\|_{L^\infty}^2 \|f\|^2$ άρα $\|T\| \leq \|h\|_{L^\infty}$

Έστω $\varepsilon > 0$ Τότε το σύνολο
$U = \{x \in \Omega : |h(x)| > \|h\|_{L^\infty} - \varepsilon\}$ είναι θετικού μέτρου.
Τότε $\|T\|^2 \geq \|T\chi_U\|^2 / \|\chi_U\|^2 = \int_U |h(x)|^2 dx \Big/ \int_U dx$

$\Rightarrow \|T\|^2 \geq (\|h\|_\infty - \varepsilon)^2$

Αφού $\varepsilon > 0$ τυχόν $\|T\| \geq \|h\|_\infty$

(ii) Έστω $\lambda \notin \text{essran}\, h = \{\lambda \in \mathbb{C} : \forall \varepsilon > 0 \ \text{meas}\{x \in \Omega : |h(x) - \lambda| < \varepsilon\} > 0\}$

Άρα $\exists\, \varepsilon_0 > 0$ τω $\text{meas}\{x \in \Omega : |h(x) - \lambda| < \varepsilon_0\} = 0$

Άρα $|h(x) - \lambda| \geq \varepsilon_0$ σ.π.

Εύκολα βλέπουμε τότε ότι ο πολλαπλασιαστικός τελεστής $(Sf)(x) = f(x)/(h(x) - \lambda)$ είναι φραγμένος, $\|S\| \leq 1/\varepsilon_0$ και είναι αντίστροφος του $T - \lambda$

Άρα $\lambda \notin \sigma(T)$

Έστω $\lambda \notin \sigma(T)$. Έστω $S = (T - \lambda)^{-1}$. Για κάθε $f \in L^2(\Omega)$ έχουμε

$f(x) = [(T - \lambda) S f](x) = (h(x) - \lambda)(Sf)(x)$

Έστω αντίθετα ότι $\lambda \in \text{essran}(h)$. Άρα

$\text{meas}\underbrace{\{x \in \Omega : |h(x) - \lambda| < \varepsilon\}}_{U_\varepsilon} > 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0.$

Έστω $\varepsilon > 0$ Τότε $\chi_{U_\varepsilon}(x) = (h(x) - \lambda)(S\chi_{U_\varepsilon})(x)$

Ειδικότερα αν $x \in U_\varepsilon$

$$(S\chi_{U_\varepsilon})(x) = 1/(h(x) - \lambda)$$

Άρα $\|S\|^2 \geq \dfrac{\|S\chi_{U_\varepsilon}\|^2}{\|\chi_{U_\varepsilon}\|^2} \geq \dfrac{\int_{U_\varepsilon} |S\chi_{U_\varepsilon}(x)|^2 dx}{\int_{U_\varepsilon} \chi_{U_\varepsilon}^2 \, dx} = \dfrac{\int_{U_\varepsilon} \frac{dx}{|h(x) - \lambda|}}{\int_{U_\varepsilon} dx} \geq 1/\varepsilon^2$

Άρα $\|S\| \geq \dfrac{1}{\varepsilon} \quad \forall\, \varepsilon > 0.$ Άτοπο (αφού $\|S\| < +\infty$)