Μάθημα 13ο   Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση   8/4/2019

Εφαρμογή: το πρόβλημα Sturm - Liouville

Ορισμός: Μια συνάρτηση $u:[\alpha,\beta]\to\mathbb{C}$ λέγεται απόλυτα συνεχής αν $\forall\, \varepsilon>0\ \exists\, \delta>0 : \forall\, n\in\mathbb{N}$, $\forall\, n$ το πλήθος ξένα ανά 2 διαστήματα $[x_k,y_k]\subset[\alpha,\beta]$ $k=1,\dots,n$, ισχύει ότι αν $\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)<\delta$ τότε $\sum_{k=1}^{n}|u(y_k)-u(x_k)|<\varepsilon$

Παρατήρηση: Ισχύει ότι Lipschitz $\Rightarrow$ απόλυτα συνεχής $\Rightarrow$ ομοιόμορφα συνεχής.

Πρόταση: Αν η u είναι απόλυτα συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ τότε είναι σχεδόν παντού παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$, η παράγωγος της $u'\in L^1(\alpha,\beta)$ και $u(x)=u(\alpha)+\int_\alpha^x u'(t)\,dt$
Αντίστροφα, αν $v\in L^1(\alpha,\beta)$ τότε η $u(x)=\int_\alpha^x v(t)\,dt$ είναι απόλυτα συνεχής και $u'=v$ σχεδόν παντού.

Το πρόβλημα Sturm - Liouville

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u(x)=f(x) & \text{στο } [0,1] \\ \alpha u(0)+\alpha' u'(0)=0 & ,\alpha^2+\alpha'^2\neq 0 \\ \beta u(1)+\beta' u'(1)=0 & ,\beta^2+\beta'^2\neq 0 \end{cases}$$

Ορισμός: Ονομάζουμε τελεστή Sturm-Liouville στον $L^2(0,1)$, έναν τελεστή L της μορφής
$$Lu(x)=-\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u(x)$$,μαζί με συνοριακές συνθήκες της μορφής:

$$\begin{cases} \alpha u(0)+\alpha' u'(0)=0 & , |\alpha|+|\alpha'|\neq 0 \\ \beta u(1)+\beta' u'(1)=0 & , |\beta|+|\beta'|\neq 0 \end{cases}$$

όπου:

(i) $p\in C^1([0,1])$, $q\in C([0,1])$

(ii) $p(x)>0$ στο $[0,1]$

Το πεδίο ορισμού $D(L)$ είναι το σύνολο όλων των $u \in L^2(0,1)$ για τις οποίες:

(i) η u' υπάρχει και είναι απόλυτα συνεχής

(ii) η $u'' \in L^2(0,1)$

(iii) η u ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες

Για $u \in D(L)$ ορίζουμε

$$(Lu)(x) = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u(x) \quad (\text{οπότε } Lu \in L^2(0,1))$$

Παρατήρηση: Ο L δεν είναι φραγμένος

Τεχνική υπόθεση: Ο L είναι 1-1 δηλαδή αν $u \in D(L)$, $Lu = 0 \Rightarrow u = 0$

Θεώρημα: Ο L είναι 1-1 και επί και ο L^{-1} είναι συμπαγής και αυτοσυζυγής

Απόδειξη:

Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων, γνωρίζουμε ότι υπάρχουν μη-μηδενικές συναρτήσεις $u_1, u_2 \in C^2([0,1])$ τέτοιες ώστε

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du_i}{dx}\right) + qu_i = 0, \quad \text{στο } [0,1] \quad i = 1,2 \\ \alpha u_1(0) + \alpha' u_1'(0) = 0 \\ \beta u_2(1) + \beta' u_2'(1) = 0 \end{cases}$$

Θέτουμε

$$W(t) = \begin{vmatrix} u_1(t) & u_2(t) \\ u_1'(t) & u_2'(t) \end{vmatrix} \quad \text{τότε}$$

$$(pW)' = (pu_1u_2' - pu_2u_1')' = (pu_2')'u_1 + \cancel{pu_1'u_2'} - (pu_1')'u_2 - \cancel{pu_2'u_1'}$$
$$= qu_2u_1 - qu_1u_2 = 0$$

Άρα $pW =$ σταθερά $= -c$.

Ισχυρισμός: $c \neq 0$

Έστω αντίθετα ότι $c = 0$ Τότε $W(t) = 0$ στο $[0,1]$

Ειδικότερα $W(0) = 0$ δηλ.

$u_1(0)u_2'(0) - u_2(0)u_1'(0) = 0 \quad \rightsquigarrow$ Ισχύει $u_1(0) \neq 0$ ή $u_1' \neq 0$

Ας υποθέσουμε ότι $u_1(0) \neq 0$ (ανάλογα θα κάναμε αν $u_1'(0) \neq 0$)

Τότε $\alpha u_2(0) + \alpha' u_2'(0) = \alpha u_2(0) + \alpha' \frac{u_2(0)u_1'(0)}{u_1(0)} = \frac{u_2(0)}{u_1(0)}(\alpha u_1(0) + \alpha' u_1'(0)) = 0$

Άρα $u_2 \in D(L)$ έχουμε τότε $Lu_2 = 0$ Άτοπο αφού L 1-1

Ορίζουμε τώρα τον ολοκληρωτικό πυρήνα

$$k(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{c} u_1(x) u_2(t) & , x \leq t \\ \frac{1}{c} u_1(t) u_2(x) & , x \geq t \end{cases}$$

και

$$K : L^2(0,1) \to L^2(0,1) \qquad (Kf)(x) = \int_0^1 k(x,t) f(t)\,dt$$

ισχύει $\int_0^1 \int_0^1 k(x,t)^2 \,dx\,dt < +\infty$ άρα K Hilbert-Schmidt

Επίσης $k(x,t) = k(t,x) = \overline{k(t,x)}$

Άρα K συμπαγής και αυτοσυζυγής. Θα δείξουμε ότι $K = L^{-1}$

Έστω $f \in L^2(0,1)$, $g = Kf$ Θα δείξουμε ότι $g \in D(L)$

Θέτουμε:

$$v_1(x) = \frac{1}{c} \int_0^x u_1(t) f(t)\,dt \quad , \quad v_2(x) = \frac{1}{c} \int_0^x u_2(t) f(t)\,dt$$

Έχουμε $g(x) = \int_0^1 k(x,t) f(t)\,dt = \frac{1}{c} \int_0^x u_1(t) u_2(t) f(t)\,dt + \frac{1}{c} \int_x^1 u_1(x) u_2(t) f(t)\,dt$

$$= u_2(x) \cdot v_1(x) + u_1(x) v_2(x)$$

Άρα g απόλυτα συνεχής και $g' = u_2' v_1 + \cancel{u_2 \frac{1}{c} u_1 f} + u_1' v_2 - \cancel{u_1 \frac{1}{c} u_2 f}$

$\Rightarrow g' = u_2' v_1 + u_1' v_2$

Άρα g' απόλυτα συνεχής και $g'' = u_2'' v_1 + u_2' \frac{1}{c} u_1 f + u_1'' v_2 - u_1' \frac{1}{c} u_2 f$ αυτό ανήκει στο $L^2(0,1)$.

Επίσης $\alpha g(0) + \alpha' g'(0) = \alpha [u_1(0) v_2(0) + \cancel{u_2(0) v_1(0)}^{0}] + \alpha' [u_2'(0) v_1(0) + u_1'(0) v_2(0)]$

$= v_2(0) [\alpha u_1(0) + \alpha' u_1'(0)] = 0$

Όμοια βρίσκουμε ότι $\beta g(1) + \beta' g'(1) = 0$

Άρα $g \in D(L)$

Έχουμε $Lg = -(pg')' + qg = -[p(u_1' v_2 + u_2' v_1)]' + q(u_1 v_2 + u_2 v_1)$

$= -[(pu_1')' v_2 + p u_1' v_2' + (pu_2')' v_1 + p u_2' v_1'] + q u_1 v_2 + q u_2 v_1 =$

$$= v_2\left[\cancelto{0}{-(pu_1')' + qu_1}\right] + v_1\left[\cancelto{0}{-(pu_2')' + qu_2}\right] - p\left[u_1'v_2' + u_2'v_1'\right]$$

$$= -p\left(-u_1' \frac{1}{c} u_2 f + u_2' \frac{1}{c} u_1 f\right) = -\frac{pf}{c}\left(u_1u_2' - u_2u_1'\right) = -\frac{pW}{c} f = f$$

Άρα $LK = I$ (στον $L^2(0,1)$)

Θα δείξουμε ότι $KL = I$ (στον $D(L)$)

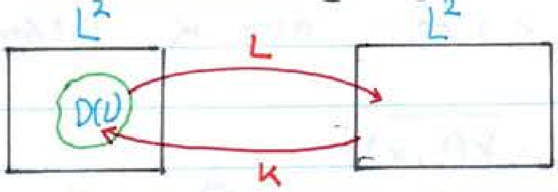
Έστω $g \in D(L)$ τότε από το προηγούμενο

$LKLg = Lg \implies L(KLg - g) = 0 \xrightarrow{L\ 1\text{-}1} KLg = g$

Άρα $K = L^{-1}$

(όμως $0 \in \sigma(K)$)

$Ran(K) = D(L) \subsetneq L^2(0,1)$



Ορισμός: Η συνάρτηση $K(x,t)$ ονομάζεται συνάρτηση Green του προβλήματος Sturm-Liouville

Θεώρημα: Υπάρχει ένα πλήρες ορθοκανονικό σύστημα $\{\varphi_n\}$ του $L^2(0,1)$ που αποτελείται από ιδιοσυναρτήσεις του L. Οι αντίστοιχες ιδιοτιμές $\{\mu_n\}$ έχουν πεπερασμένη πολλαπλότητα και $|\mu_n| \to +\infty$

Απόδειξη:

Ισχύει $L\varphi = \mu\varphi \iff KL\varphi = \mu K\varphi \iff \varphi = \mu K\varphi \iff K\varphi = \frac{1}{\mu}\varphi$

$\implies \lambda = \frac{1}{\mu}$ ιδιοτιμή του K

Εφαρμόζουμε το φασματικό θεώρημα στον K