Μάθημα 19ο: Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 13/5/2019

Συμπάγεια

Έστω $X \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Τότε ο $C(X) = \{f : X \to \mathbb{C}, \text{ συνεχής}\}$ είναι χώρος Banach ως προς τη νόρμα
$\|f\|_{C(X)} = \max_{x \in X} |f(x)|$

Παρατήρηση: Έστω ότι $f_n \to f$ στον $C(X)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε αν $n > n_0$ τότε $\|f_n - f\|_{C(X)} < \varepsilon$
δηλαδή $\max |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ άρα $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in X$
δηλαδή $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$ στο X. Ισχύει και το αντίστροφο.

Ορισμός: Το $S \subset C(X)$ λέγεται ισοσυνεχές αν $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon \ \forall f \in S$

Θεώρημα (Arzela-Ascoli)
Έστω X συμπαγής μετρικός χώρος. Αν το $S \subset C(X)$ είναι φραγμένο και ισοσυνεχές, τότε το $\overline{S}$ είναι προσυμπαγές σύνολο.

Απόδειξη:
Πρέπει και αρκεί να δείξουμε ότι κάθε ακολουθία στο S έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.
Έστω $(f_n) \subset S$

Ισχυρισμός. Ο X έχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο A
Έστω $n \in \mathbb{N}$. Το σύνολο $\{B(x, \frac{1}{n}) : x \in X\}$ είναι μια ανοικτή κάλυψη του X. Άρα αφού X συμπαγές υπάρχει πεπερασμένη υποκάλυψη.
Έστω A_n το σύνολο των κέντρων της υποκάλυψης $(A_n \subset X)$
Θα δείξω το $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι πυκνό υποσύνολο του X.
Έστω $x \in X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ $y_n \in A_n$ τέτοιο ώστε $x \in B(y_n, \frac{1}{n})$. Τότε $(y_n) \subset A$ και $y_n \to x$
Γράφουμε $A = \{y_1, y_2, \dots\}$

Υπάρχει $M>0$ τέτοιο ώστε $\|f\|_{C(X)} \le M \quad \forall f \in S$, δηλαδή
$|f(x)| \le M \quad \forall f \in S, \forall x \in X$
Η ακολουθία $(f_n(y_1))$ είναι φραγμένη (στο $\mathbb{C}$)
άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία (Bolzano-Weierstrass)
$(f_{1,n}(y_1))$
Η $(f_{1,n}(y_2))$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $(f_{2,n}(y_2))$ κ.ο.κ
Έτσι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε μια ακολουθία $(f_{k,n})$ τέτοια ώστε:
(i) $(f_{k,n})_n$ είναι υπακολουθία της $(f_{k-1,n})_n$
(ii) $(f_{k,n}(y_k))_n$ συγκλίνει
Θέτουμε $g_n = f_{n,n}$ Τότε η $(g_n(y_k))_n$ είναι συγκλίνουσα $\forall k \in \mathbb{N}$
Θα δείξουμε ότι η (g_n) είναι Cauchy
Έστω $\varepsilon>0$. Αφού S ισοσυνεχές, υπάρχει $M_1 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε
αν $d(x,y) < 1/M_1$ τότε $|f(x)-f(y)| < \varepsilon/3$, $\forall f \in S$
Το A_{M_1} είναι πεπερασμένο, άρα υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε,
αν $m,n > N$ τότε $|g_n(y) - g_m(y)| < \varepsilon/3 \quad \forall y \in A_{M_1}$
Έστω $x \in X$. Υπάρχει τότε $y \in A_{M_1}$, $d(x,y) < 1/M_1$
Έστω $m,n > N$

$$|g_n(x) - g_m(x)| \le |g_n(x) - g_n(y)| + |g_n(y) - g_m(y)| + |g_m(y) - g_m(x)|$$
$$\le \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Άρα $\varepsilon > \max_{x\in X} |g_n(x) - g_m(x)| = \|g_n - g_m\|_{C(X)}$

Άρα (g_n) Cauchy στον $C(X)$

Λήμμα: Έστω $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ και u_ε η αντίστοιχη ομαλοποιημένη συνάρτηση, τότε
$\|u_\varepsilon - u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$ $\quad \left(u_\varepsilon(x) = \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) u(x-y)\, dy \right)$

Απόδειξη.
Λόγω της πυκνότητας του $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ στον $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, αρκεί να δειχθεί για $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
Έστω $x \in \mathbb{R}^n$

$$|u_\varepsilon(x) - u(x)| = \left| \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)(u(x-y) - u(x))\, dy \right| \le \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) |u(x-y) - u(x)|\, dy =$$

Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση 13/5/2019

$$= \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} \overset{\text{ΘΘΑΛ}}{u(x-ty)}\, dt \right| dy \overset{\text{κανόνας αλυσίδας}}{=} \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \left| \int_0^1 \nabla u(x-ty)\cdot(-y)\, dt \right| dy$$

$$\overset{C-S}{\le} \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 |y|\cdot|\nabla u(x-ty)|\, dt\, dy \le \varepsilon \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 |\nabla u(x-ty)|\, dt\, dy$$

Άρα $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u_\varepsilon(x) - u(x)|^p dx \le \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 |\nabla u(x-ty)|\, dt\, dy \right)^p dx$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \left[\Big(\underbrace{\int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y)\, dy}_{=1} \Big)^{p-1} \cdot \left(\int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \left(\int_0^1 |\nabla u(x-ty)|\, dt \right)^p dy \right) \right] dx$$

$$\underset{\left(\int_0^1 |g|\, dt\right)^p \le \int_0^1 |g|^p dt}{\overset{\text{Hölder}}{\le}} \varepsilon^p \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \cdot \int_0^1 |\nabla u(x-yt)|^p\, dt\, dy\, dx$$

$$= \varepsilon^p \int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x-yt)|^p\, dx\, dt\, dy = \varepsilon^p \cdot \|\nabla u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \overbrace{\int_{|y|<\varepsilon} \rho_\varepsilon(y) \int_0^1 dt\, dy}^{1}$$