Μάθημα 20ο   Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση   15/5/2019

Θεώρημα: (Θεώρημα συμπαγούς εμβάπτισης του Rellich)
Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο και $1 \le p < \infty$. Η εμβάπτιση $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ είναι συμπαγής.

Απόδειξη:
Πρέπει να δείξουμε ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στον $W_0^{1,p}(\Omega)$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στον $L^p(\Omega)$.
Έστω λοιπόν $(u_n) \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ φραγμένη.
Ισχυρισμός: Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει υπακολουθία (u_{n_k}) της (u_n) τέτοια ώστε $\|u_{n_k} - u_{n_\ell}\|_{L^p(\Omega)} < \delta \quad \forall\, k, \ell \in \mathbb{N}$.
Επεκτείνουμε κάθε u_n στο $\mathbb{R}^n$ θέτοντας $u_n = 0$ στο $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$.
Τότε $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ (άσκηση) (Υπόδειξη $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)$)
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την ομαλοποιημένη συνάρτηση $u_{n,\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$
Από προηγούμενο λήμμα

$$\|u_{n,\varepsilon} - u_n\|_{L^p(\Omega)} \le \|u_{n,\varepsilon} - u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le \varepsilon \|\nabla u_n\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \varepsilon \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \le \underbrace{C}_{\text{σταθερά ανεξάρτητη του } n} \cdot \varepsilon < \delta/3$$

αν $\varepsilon = \delta/3C$

Η (u_n) είναι φραγμένη στον $L^p(\Omega)$ και άρα επειδή Ω φραγμένο και στον $L^1(\Omega)$. Άρα από την ανισότητα Young ($f,g: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$, $\|f * g\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \le \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \cdot \|g\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}$)

$$\|u_{n,\varepsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|\rho_\varepsilon * u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|\rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C\, \varepsilon^{-n}$$

$$\|(u_{n,\varepsilon})_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \|(\rho_\varepsilon)_{x_i} * u_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le \|(\rho_\varepsilon)_{x_i}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|u_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \le C \cdot \varepsilon^{-n-1}$$

Άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ η ακολουθία $(u_{n,\varepsilon})$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής.
Άρα υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_k,\varepsilon})$ η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\Omega^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(\Omega, x) < \varepsilon\}$ άρα και στον $L^p(\Omega)$
Άρα υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω αν $k, \ell \ge k_0$ τότε $\|u_{n_k,\varepsilon} - u_{n_\ell,\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} < \delta/3$
Άρα υπάρχει υπακολουθία $(u_{n_{k_i}})$ τέτοια ώστε:
$\|u_{n_{k_i},\varepsilon} - u_{n_{k_j},\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} < \delta/3 \quad \forall\, i,j \in \mathbb{N}$.
Έστω $i,j \in \mathbb{N}$ τότε:

$$\|u_{n_{k_i}} - u_{n_{k_j}}\|_{L^p(\Omega)} \le \|u_{n_{k_i}} - u_{n_{k_i},\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} + \|u_{n_{k_i},\varepsilon} - u_{n_{k_j},\varepsilon}\|_{L^p(\Omega)} + \|u_{n_{k_j},\varepsilon} - u_{n_{k_j}}\|_{L^p(\Omega)} < \delta/3 + \delta/3 + \delta/3 = \delta$$

Εφαρμόζουμε τον ισχυρισμό για $\delta = 1$.

Υπάρχει υπακολουθία $(u_{1,k})_k$ της (u_n) τέτοια ώστε
$\|u_{1,k}-u_{1,\ell}\|_{L^p(\Omega)} < 1 \quad \forall\, k,\ell \in \mathbb{N}$
Όμοια υπάρχει υπακολουθία $(u_{2,k})$ της $(u_{1,k})$ ώστε
$\|u_{2,k}-u_{2,\ell}\|_{L^p(\Omega)} < 1/2 \quad \forall\, k,\ell\in\mathbb{N}$ και ου το καθεξής $\Rightarrow \|u_{n,k}-u_{n,\ell}\|_{L^p(\Omega)} < 1/n \ \forall k,\ell\in\mathbb{N}$
Θα δείξουμε ότι η $v_k = u_{k,k}$ είναι Cauchy στον $L^p(\Omega)$
Παρατηρούμε ότι αν $i>j$ και $k,\ell\in\mathbb{N}$ τότε υπάρχει $m\in\mathbb{N}$:
$u_{i,k} = u_{j,m}$, άρα αν πάρω
$\|u_{i,k}-u_{j,\ell}\|_{L^p(\Omega)} = \|u_{j,m}-u_{j,\ell}\|_{L^p(\Omega)} < 1/j$
Έστω τώρα $\ell,k\in\mathbb{N}$, $\ell>k$ τότε
$\|v_\ell - v_k\|_{L^p(\Omega)} = \|u_{\ell,\ell}-u_{k,k}\|_{L^p(\Omega)} < 1/k$ Άρα (v_k) Cauchy

Άσκηση 13: Έστω $u(x) = |x|^\alpha$, $x\in B(1)$. Να βρεθεί για ποια $\alpha\in\mathbb{R}$ η u:
(i) είναι C^1 στη $B(1)$
(ii) Είναι ασθενώς παραγωγίσιμη
(iii) Ανήκει στο $W^{1,p}(B(1))$, όπου $p\geq 1$

Λύση:
(i) Το να υπάρχει η μερική παράγωγος πρέπει να υπάρχει το όριο
του $\left|\dfrac{u(\delta e_k)-u(0)}{\delta}\right| = \dfrac{|\delta|^\alpha}{\delta} = \begin{cases} \longrightarrow 0, & \text{αν } \alpha>1 \\ \longrightarrow \nexists \text{ όριο}, & \text{αν } \alpha=1 \\ \longrightarrow \nexists \text{ όριο}, & \text{αν } \alpha<1 \end{cases}$

Άρα οι μερικές παράγωγοι $u_{x_k}(0)$ υπάρχουν αν και μόνο αν $\alpha>1$
και $u_{x_k}(0)=0$
Θέλουμε και συνέχεια στο 0, για $\alpha>1$
Έχουμε για $x\neq 0$.
$\dfrac{\partial}{\partial x_k}|x|^\alpha = \alpha|x|^{\alpha-2}\cdot x_k \xrightarrow[x\to 0]{?} 0$
έχουμε $\left|\dfrac{\partial}{\partial x_k}|x|^\alpha\right| = \alpha|x|^{\alpha-2}x_k \leq \alpha\cdot|x|^{\alpha-1} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
Άρα $u\in C^1(B(1))$ για $\alpha>1$
(ii) Πρέπει $u\in L^1_{loc}(B(1))$, ισοδύναμα $u\in L^1(B(r))$, $r<1$
Έχουμε
$\|u\|_{L^1(B(r))} = \int_{B(r)} |x|^\alpha dx = \overset{\text{Εμβαδό επιφάνειας}}{\sigma(n)} \int_0^r t^\alpha\cdot t^{n-1}\,dt < \infty$ αν και μόνο αν $\alpha>-n$

Ε6. Εφαρμοσμένη Συναρτησιακή Ανάλυση

15/5/2019

Η ασθενής παράγωγος, αν υπάρχει, θα είναι ίση με τη κλασσική στο $B(1)\setminus\{0\}$ και άρα η u_{x_k} θα είναι η $\alpha|x|^{\alpha-2}\cdot x_k$

Πρέπει για κάθε k να ισχύει ότι $\alpha|x|^{\alpha-2}x_k \in L^1_{loc}(B(1))$

Ισοδύναμα πρέπει $|x|^{\alpha-1} \in L^1_{loc}(B(1))$

Άρα πρέπει $\forall\ r<1 \quad \||x|^{\alpha-1}\|_{L^1(B(r))} < 1$ άρα πρέπει (όπως πριν)

$\alpha-1 > -n \implies \alpha > -n+1$

Άρα οπωσδήποτε πρέπει $\alpha > -n+1$

(Η συνέχεια στο επόμενο μάθημα)