Μάθημα 1ο   Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις I   Μπαρμπάτης   28/2/2019

Στοιχεία από τον Απειροστικό Λογισμό

1 Κανόνας της αλυσίδας

Έστω $\underset{x}{\mathbb{R}^n} \xrightarrow{f(x)} \underset{y}{\mathbb{R}^m} \xrightarrow{g(y)} \mathbb{R}$, f, g διαφορίσιμες (π.χ. C^1)

και έστω $h = g \circ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

Ο κανόνας της αλυσίδας μας λέει ότι η h είναι διαφορίσιμη και

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g(f(x))}{\partial y_j} \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)$$

Ειδικότερα αν $n=1$, τότε $h'(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g(f(x))}{\partial y_j} \cdot f_j'(x) = (\nabla g)(f(x)) \cdot f'(x)$

2 Ολοκληρώματα

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο με ομαλό σύνορο (π.χ C^1 σύνορο)

(α) Για $f \in C(\Omega)$ φραγμένη ορίζεται το $\int_\Omega f(x)dx$

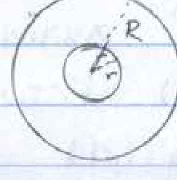
(β) Αν $g \in C(\partial\Omega)$ τότε ορίζεται το $\int_{\partial\Omega} g(x)\, ds$

3 Ολοκλήρωση σε σφαιρικές συντεταγμένες.

$B(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| < r\}$, $S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |x-y| = r\}$, $B(r) = B(0,r)$, $S(r) = S(0,r)$

Αν $f \in C(\overline{B(R)})$ τότε

$$\int_{B(R)} f(x)\,dx = \int_0^R \int_{S(r)} f(x)\,ds\,dr$$



Συμβολίζουμε με α_n, b_n $(n \geq 2)$ τις σταθερές που ορίζονται από τις σχέσεις

$|B(r)| = \alpha_n \cdot r^n$

$|\partial B(r)| = b_n \, r^{n-1}$

$\alpha_2 = \pi$, $b_2 = 2\pi$

$\alpha_3 = \frac{4\pi}{3}$, $b_3 = 4\pi$

Έχουμε $\alpha_n = |B(1)| = \int_{B(1)} dx = \int_0^1 \int_{S(r)} ds\,dr = \int_0^1 b_n r^{n-1} dr = \frac{b_n}{n} \Longrightarrow b_n = n \cdot \alpha_n$

Άσκηση: Να δειχθεί ότι $\alpha_n = \dfrac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}$ όπου $\Gamma(t)=\int_0^{\infty} s^{t-1} e^{-s}\, ds$

Ισχύει $\Gamma(t+1)=t\cdot\Gamma(t)$, $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$, $\Gamma(1)=1$

Θεώρημα απόκλισης:

Έστω Ω φραγμένο με C^1 σύνορο και $\vec{F}$ διανυσματικό πεδίο στο $C^1(\overline{\Omega})$

Τότε

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}\vec{F}\, dx = \int_{\partial\Omega} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS \qquad \operatorname{div}(f_1,\dots,f_n)=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\dots+\frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

← μοναδιαίο κάθετο

Ειδικότερα $\int_{\Omega} f_{x_i}\, dx = \int_{\partial\Omega} f\cdot n_i\, dS \quad \forall\, f\in C(\overline{\Omega})$

Επίσης αν $u,v\in C^2(\overline{\Omega})$ τότε $\int_{\Omega}\Delta u\, dx = \int_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\, dS$, $\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}=\nabla u\cdot\vec{n}$

$$\int_{\Omega}\nabla u\nabla v\, dx = -\int_{\Omega} u\Delta v\, dx + \int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial\vec{n}} u\, dS$$

$$\int_{\Omega}(u\cdot\Delta v - v\cdot\Delta u)\, dx = \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\vec{n}} - v\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}\right) ds$$

$$\int_{\Omega} f_{x_i} g\, dx = -\int_{\Omega} f g_{x_i}\, dx + \int_{\partial\Omega} f\cdot g\, n_i\, dS$$

Πρόταση: Έστω $f(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$ ακτινικά συμμετρική, δηλαδή υπάρχει $g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ τω $f(x)=g(|x|)$. Έστω ότι $g\in C^2$. Τότε

$$(\Delta f)(x) = g''(|x|) + \frac{n-1}{|x|} g'(|x|) \quad , x\neq 0$$

Συχνά γράφουμε $\Delta f = f'' + \frac{n-1}{r}\cdot f'$, $r=|x|$

4 Χώροι συναρτήσεων

$\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ ανοικτό , $C(\Omega)$, $C(\overline{\Omega})$, $C^k(\Omega)$, $C^k(\overline{\Omega})$, $C^{\infty}(\Omega)$, $C^{\infty}(\overline{\Omega})$

Ορισμός: Λέμε ότι το U περιέχεται συμπαγώς στο ανοικτό $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ αν

$\left.\begin{array}{l}(i)\ \overline{U} \text{ συμπαγές}\\ (ii)\ \overline{U}\subseteq\Omega\end{array}\right\}$ και γράφουμε $U\subset\subset\Omega$

ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Μπαρμπάτης   28/2/2019

Παρατήρηση: Αν $U \subset\subset \Omega$ τότε υπάρχει $\delta>0$ τ.ω. $|x-y| \geq \delta, \forall x \in U, \forall y \in \partial\Omega$

Ορισμός: Ο φορέας μιας συνάρτησης $u: \Omega \to \mathbb{R}$ είναι το σύνολο $\overline{\text{supp}(u) = \{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}}$

Ορισμός: Για $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό θέτουμε $C_c^\infty(\Omega) = \{u \in C^\infty(\Omega) : \text{supp}(u) \subset\subset \Omega\}$
$\overset{\shortparallel}{C_0^\infty(\Omega)}$

Παρατήρηση: Αν $u \in C_c^\infty(\Omega)$ τότε υπάρχει $\delta>0$ τ.ω. $u(x)=0 \quad \forall x \in \Omega$ τ.ω. $\text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta$

Έστω $\delta>0$ τ.ω. $|x-y| \geq \delta \quad \forall x \in \text{supp}(u), \forall y \in \partial\Omega$
Έστω $x \in \Omega$ τ.ω. $\text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta$. Τότε $\exists\, y \in \partial\Omega$ τ.ω. $|x-y| < \delta$
άρα $x \notin \text{supp}(u)$. Άρα $u(x)=0$

Παρατήρηση: Η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad g(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t>0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$ ανήκει στο $C^\infty(\mathbb{R})$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ $\exists$ πολυώνυμο p_n τ.ω. $g^{(n)}(t) = p_n(1/t) \cdot e^{-1/t}, \quad t>0$

5 Ομαλοποιητές

Πρόταση: Υπάρχει ακτινικά συμμετρική συνάρτηση $\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ τ.ω.
(i) $\rho(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^n$
(ii) $\text{supp}(\rho) = \overline{B(1)}$
(iii) $\int_{B(1)} \rho(x)\, dx = 1$

Απόδειξη:
Ορίζουμε $\rho(x) = c \cdot g(1-|x|^2) = \begin{cases} c \cdot e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}, & |x|<1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$
όπου $c>0$ τ.ω. $\int \rho(x)\, dx = 1$
Τότε η ρ είναι C^∞ και έχει τις ζητούμενες ιδιότητες.

1. Αρμονικές συναρτήσεις / Το πρόβλημα του Dirichlet

Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό, συνεκτικό (χωρίο/domain)

Ορισμός: Μια συνάρτηση $u \in C^2(\Omega)$ λέγεται αρμονική αν είναι λύση της εξίσωσης Laplace $\Delta u = 0$ στο Ω
(όπου $\Delta u = u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n} = \operatorname{div} \nabla u$)

Συνήθως έχουμε και συνοριακές συνθήκες. Υπάρχουν δύο βασικά προβλήματα συνοριακών τιμών.

- Πρόβλημα Dirichlet

Δίνονται $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$. Ζητείται $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

- Πρόβλημα Neumann Έστω Ω C^1 σύνορο

Δίνονται $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$. Ζητείται $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ τέτοια ώστε

$$\begin{cases} \Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

Άσκηση: Να δειχθεί ότι το πρόβλημα Neumann εν γένει δεν έχει λύση. Βρείτε μια αναγκαία συνθήκη στις f, g προκειμένου να έχει λύση.