Μάθημα 2ο Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Μπαρμπάτης 7/3/2019

Άσκηση: Να βρεθούν οι f, ακτινικά συμμετρικές και αρμονικές στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Λύση:

Είχαμε ότι αν $f(|x|) \overset{|x|=r}{=} g(r)$, τότε $\Delta f = g''(r) + \frac{n-1}{r} g'(r)$

Έστω $f(x) = f(r)$, $r = |x|$, όπου $f \in C^2(0,+\infty)$

Άρα $f_{x_i}(x) = g'(r) r_{x_i} = g'(r)\, x_i/r$

$f_{x_i x_i}(x) = g''(r)\, x_i^2/r^2 - g'(r)/r^2 \cdot x_i^2/r + g'(r)/r$

Άρα $(\Delta f)(x) = g''(x) \cdot r^2 - g'(r) r^2/r^3 + n g'(r)/r = g''(r) + (n-1) g'(r)/r$

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις f που είναι ακτινικά συμμετρικές και αρμονικές στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Ζητάμε $g(r)$ τ.ω. $g''(r) + (n-1) g'(r)/r = 0$

Βρίσκουμε τελικά

$$g(r) = \begin{cases} c_1 \log r + c_2, & n = 2 \\ c_1 r^{2-n} + c_2, & n \geq 3 \end{cases}$$

(Οι παραπάνω g στο 0 απειρίζονται, άρα οι μόνες αρμονικές, ακτινικά συμμ. σ' όλο τον $\mathbb{R}^n$ είναι οι σταθερές)

Συμβολισμός: $⨍_E f = \frac{1}{|E|} \int_E f$ μέση τιμή της f στο E

Ορισμός: Έστω $u \in C(\Omega)$. Λέμε ότι η u έχει την ιδιότητα μέσης τιμής αν για κάθε $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$ έχουμε $u(x) = ⨍_{B(x,r)} u(y)\, dy$ (ισοδύναμα $u(x) = ⨍_{S(x,r)} u(y)\, dS(y)$)

Λήμμα: Αν η u έχει την ιδιότητα μ.τ. τότε είναι C^∞

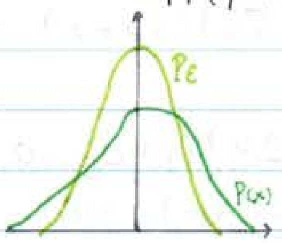
Θεωρούμε τη συνάρτηση $p(x)$ για την οποία $p \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

$\mathrm{supp}(p) = \overline{B}(1)$ $\int_{\mathbb{R}^n} p(x)\, dx = 1$

$p = p(|x|)$, $0 \leq p(x) \leq 1$

Για $\varepsilon > 0$ ορίζουμε $p_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} p(x/\varepsilon)$ τότε $\mathrm{supp}(p_\varepsilon) = \overline{B}(\varepsilon)$

και $\int_{B(\varepsilon)} p_\varepsilon(x)\, dx = \varepsilon^{-n} \int_{|x|<\varepsilon} p(x/\varepsilon)\, dx$



$x = \varepsilon y$ $x \in B(\varepsilon) \iff y \in B(1)$

$dx = \varepsilon^n dy$

$= \int_{|y|<1} p(y)\, dy = 1$

Απόδειξη Λήμματος.

Έστω $\varepsilon>0$ Ορίζουμε $\Omega_\varepsilon = \{x\in\Omega : \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) > \varepsilon\}$

Για $x \in \Omega_\varepsilon$ ορίζουμε

$$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy \quad (1)$$
$$= \int_{B(x,\varepsilon)} \underset{\rho_\varepsilon(|x-y|)}{\rho_\varepsilon(x-y)}\, u(y)\, dy$$

$\rho_\varepsilon(|x-y|)$ είναι συνεκτικό

Στην (1) μπορούμε να παραγωγίσουμε κάτω από το ολοκλήρωμα

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = \int_\Omega \frac{\partial \rho_\varepsilon}{\partial x_i}(x-y)\, u(y)\, dy \qquad \text{άρα } u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

Θα δείξουμε ότι $u_\varepsilon = u$ άρα u θα είναι C^∞

Έχουμε $u_\varepsilon(x) = \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(x,r)} \rho_\varepsilon(|x-y|)\, u(y)\, ds(y)\, dr = \int_0^\varepsilon \rho_\varepsilon(r) \int_{\partial B(x,r)} u(y)\, ds(y)\, dr$

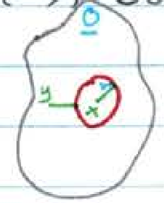
$$\overset{\text{ιδιότητα μέσης τιμής}}{=} \int_0^\varepsilon \rho_\varepsilon(r)\, u(x) \int_{\partial B(x,r)} ds(y)\, dr = u(x) \overbrace{\int_{B(x,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(x-y)\, dy}^{=1 \text{ σωφορέα}} = u(x)$$

Άρα $u_\varepsilon = u$ στο Ω_ε, άρα $u \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$ $\forall \varepsilon>0$, άρα $u \in C^\infty(\Omega)$

Θεώρημα: Έστω $u\in C(\Omega)$. Η u είναι αρμονική αν και μόνο αν έχει την ιδιότητα μέσης τιμής

Απόδειξη:

($\Rightarrow$) Έστω $x \in \Omega$ και για $r < \mathrm{dist}(x,\partial\Omega)$ θέτουμε $\phi(r) = ⨍_{\partial B(x,r)} u(y)\, ds(y)$



Αρκεί ν.δ.ο $\phi(r) = u(x)$ $\forall r$

Θέτουμε $y = x + rz$ οπότε $y \in S(x,r) \Leftrightarrow z \in \partial B(1)$

$dS(y) = r^{n-1}\, ds(z)$

Άρα $\phi(r) = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x,r)} u(y)\, ds(y) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S(1)} u(x+rz)\, dz$

Συνεπώς

$$\phi'(r) = \frac{1}{\sigma_n} \int_{S(1)} (\nabla u)(x+rz)\cdot z\, dz = \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{S(x,r)} (\nabla u)(y) \cdot \frac{y-x}{r}\, ds(y)$$

$$\overset{\text{θεώρημα απόκλισης}}{=} \frac{1}{\sigma_n r^{n-1}} \int_{B(x,r)} (\Delta u)(y)\, dy = 0. \qquad \text{Άρα } \phi(r) = \text{σταθερή}$$

Αφού u συνεχής $\lim_{r\to 0} \phi(r) = u(x)$ άρα ισχύει η ιδιότητα μέσης τιμής

(⇐) Αφού η u έχει την ιδιότητα μέσης τιμής είναι C^∞.
Έστω ότι $\exists\, x \in \Omega$ τέτοιο ώστε $(\Delta u)(x) \neq 0$, χωρίς βλάβη της γενικότητας $(\Delta u)(x) > 0$. Θεωρούμε την $\phi(r)$ όπως πριν
Άρα $\phi(r) =$ σταθερή $= u(x)$. Όπως πριν $\phi'(r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{B(x,r)} (\Delta u)(y)\,dy$
Άρα $\phi'(r) > 0$ για μικρά $r > 0$, άτοπο.

Πόρισμα: Το σύνολο όλων των αρμονικών συναρτήσεων είναι κλειστό ως προς την τοπολογία της τοπικά ομοιόμορφης σύγκλισης (ομοιόμορφη σύγκλιση στα συμπαγή υποσύνολα του Ω)
Έστω (u_n) αρμονικές στο Ω, $u_n \to u$ τοπικά ομοιόμορφα
Έστω $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$ τότε $u_n(x) = \fint_{B(x,r)} u_n(y)\,dy \overset{n\to\infty}{\Longrightarrow} u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)\,dy$

Θεώρημα (ασθενής και ισχυρή αρχή μεγίστου)
Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο χωρίο και έστω $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ αρμονική στο Ω, τότε
(i) $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u$ (ασθενής αρχή μεγίστου)
(ii) αν $\exists\, x_0 \in \Omega$ τέτοια ώστε $u(x_0) = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$ (ισχυρή αρχή μεγίστου) τότε $u =$ σταθερή

Απόδειξη:
(ii) Έστω $M = \max\limits_{\overline{\Omega}} u$
Άρα $\exists\, x_0 \in \Omega$ τέτοιο ώστε $u(x_0) = M$. Θέτουμε $A = \{x \in \Omega : u(x) = M\}$
Έστω $x \in A$ και $r > 0$ τω $\overline{B}(x,r) \subset \Omega$
Τότε $M = u(x) = \fint_{B(x,r)} u(y)\,dy \leq \fint_{B(x,r)} M\,dy = M \Rightarrow$ Άρα $u(y) = M$. Άρα $B(x,r) \subset A$

Άρα A ανοικτό υποσύνολο του Ω. Όμως A κλειστό (ως προς τη σχετική τοπολογία)
Αφού Ω συνεκτικό και $A \neq \emptyset$, έχουμε $A = \Omega$. Άρα $u =$ σταθερή

Παρατηρήσεις:
1. Ανάλογα ισχύει η αρχή του ελαχίστου
2. Μια C^2 συνάρτηση u λέγεται υφαρμονική αν $\Delta u \geq 0$ στο Ω
Αν η u είναι υφαρμονική στο Ω, τότε

$$u(x) \leq \begin{cases} \fint_{B(x,r)} u(y)\,dy \\ \fint_{S(x,r)} u(y)\,dy \end{cases} \quad \forall\, \overline{B}(x,r) \subset \Omega \quad (*)$$

ακριβώς όπως πριν,

Μια συνεχής συνάρτηση $u \in C(\Omega)$ τω να ισχύουν οι (*) $\forall\, \overline{B}(x,r) \subset \Omega$
λέγεται ασθενώς υφαρμονική
Η αρχή μεγίστου ισχύει για κάθε ασθενώς υφαρμονική συνάρτηση

Παρατήρηση: Αν η u είναι C^2 και κυρτή τότε είναι υφαρμονική

u C^2 κυρτή $\Rightarrow$ $Hess(u)$ θετικά ημιορισμένος $\Rightarrow u_{x_i x_i} \geq 0 \;\; \forall i \Rightarrow \Delta u \geq 0$.

Μάθημα 3ο ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Μπαρμπάτης 14/3/2019

Ασκήσεις

(1) Έστω $u: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ και $v(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$. Να δειχθεί ότι u αρμονική στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \Leftrightarrow v$ αρμονική στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

(2) Να δειχθεί ότι η Λαπλασιανή Δ είναι αναλλοίωτος ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς: Αν $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ορθογώνιος μετασχηματισμός και $(Sf)(x) = f(Tx)$ τότε $S\Delta = \Delta S$

Πρόταση (Μοναδικότητα λύσης για το πρόβλημα Dirichlet)

Το πρόβλημα
$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{στο } \Omega \\ u = g & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$
έχει το πολύ μια λύση στο $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$

Απόδειξη:

Έστω u_1, u_2 λύσεις του προβλήματος. Έστω $v = u_1 - u_2$. Τότε
$$\Delta v = 0 \quad \text{στο } \Omega$$
$$v = 0 \quad \text{στο } \partial\Omega$$
Από την αρχή του μεγίστου έπεται ότι $v = 0$ στο $\overline{\Omega}$

Παρατήρηση: Η υπόθεση ότι το Ω είναι φραγμένο δεν μπορεί να παραλειφθεί

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών
$$\Delta u = 0 \quad x \in \mathbb{R}, \ 0 < y < \pi$$
$$u = 0 \quad y = 0 \text{ ή } y = \pi.$$
έχει ως λύση, εκτός από τη μηδενική, και την $u(x,y) = e^x \cdot \sin y$

Πρόταση: Έστω u αρμονική στο Ω $\forall B(x_0, r) \subset\subset \Omega$ ισχύει
$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{C_n}{r^{n+1}} \int_{B(x_0,r)} |u(y)|\, dy$$

Απόδειξη:

Έστω $1 \leq i \leq n$. Έχουμε $\Delta u_{x_i} = (\Delta u)_{x_i} = 0$, δηλαδή η u_{x_i} είναι αρμονική

από το ΘΜΤ $u_{x_i}(x_0) = \frac{1}{|B(x_0, r/2)|} \int_{B(x_0, r/2)} u_{x_i}(y)\, dy \overset{\text{Green}}{=} \frac{1}{|B(r/2)|} \int_{\partial B(x_0, r/2)} u(y)\, \nu_i\, ds$

Άρα $|u_{x_i}(x_0)| \le \frac{1}{|B(r/2)|} \int_{\partial B(x_0, r/2)} |u(y)| ds \le \frac{|\partial B(x_0, r/2)|}{|B(r/2)|} \max_{\partial B(x_0, r/2)} |u| = \frac{\partial B(\frac{r}{2})}{|B(\frac{r}{2})|} \max_{\partial B(x_0, r/2)} |u|$

Έστω τώρα $x \in \partial B(x_0, r/2)$ τότε

$$|u(x)| = \left| \frac{1}{|B(r/2)|} \int_{B(x, r/2)} u(y) dy \right| \le \frac{1}{|B(\frac{r}{2})|} \int_{B(x, r/2)} |u(y)| dy \le \frac{1}{|B(\frac{r}{2})|} \int_{B(x_0, r)} |u(y)| dy$$

Άρα $|u_{x_i}(x_0)| \le \frac{|\partial B(r/2)|}{|B(r/2)|} \frac{1}{|B(\frac{r}{2})|} \int_{B(x_0, r)} |u(y)| dy = \frac{\beta_n (\frac{r}{2})^{n-1}}{(\alpha_n (\frac{r}{2})^n)^2} \int_{B(x_0, r)} |u(y)| dy$

$$= \frac{C_n}{r^{n+1}} \int_{B(x_0, r)} |u(y)| dy$$

Πρόταση: (Θ. Liouville)

Αν η $u: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι αρμονική και φραγμένη τότε είναι σταθερή.

Απόδειξη:

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Έστω $M = \sup|u|$, τότε $\forall\, r > 0$

$$|\nabla u(x_0)| \le \frac{C_n}{r^{n+1}} \int_{B(x_0, r)} |u(y)| dy \le \frac{C_n}{r^{n+1}} M \alpha_n r^n \xrightarrow[r \to \infty]{} 0$$

Άρα $\nabla u(x_0) = 0$ οπότε η u είναι σταθερή

Θεώρημα (ανισότητα Harnack)

Έστω $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ χωρίο και $V \subset\subset \Omega$, V συνεκτικό, τότε υπάρχει $C > 0$, που εξαρτάται μόνο απ' το Ω και το V, τέτοιο ώστε

$\sup_V u \le C \inf_V u$ για κάθε μη αρνητική αρμονική συνάρτηση $u: \Omega \to \mathbb{R}$

Απόδειξη:

Έστω $r = \frac{1}{4} \operatorname{dist}(V, \partial\Omega)$

Αφού $\bar{V}$ συμπαγές, μπορούμε να το καλύψουμε με μπάλες $B_1, \dots, B_k$ διαμέτρου r, χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$

Θα δείξουμε ότι η $C = 2^{n(k+1)}$ έχει τη ζητούμενη ιδιότητα

Έστω λοιπόν $u: \Omega \to \mathbb{R}$ αρμονική, μη αρνητική

Αρκεί να δείξουμε ότι $u(x) \le C u(y) \quad \forall\, x, y \in V$

Έστω $x, y \in V$

(i) $|x - y| < r$ τότε $u(x) = \frac{1}{|B(r)|} \int_{B(x, r)} u(z) dz \le \frac{1}{|B(r)|} \int_{B(y, 2r)} u(z) dz =$

$$= \frac{2^n}{|B(2r)|}\int_{B(y,2r)} u(z)\,dz = 2^n u(y) \le C\cdot u(y)$$

(ii) $|x-y|>r$

Έστω ότι $x\in B_n$, $y\in B_m$, $m>n$

Έστω $x_i \in B_i\cap B_{i+1}$ $i=n,\dots,m-1$, τότε $|x-x_n|<r$, $|x_i-x_{i+1}|<r$, $i=n+1,\dots,m-1$

Άρα από το (i) $u(x)\le 2^n u(x_n)$

$u(x_i)\le 2^n u(x_{i+1})$

$\vdots$

$u(x_{m-1})\le 2^n u(y)$

πολλαπλασιάζοντας αυτές τις σχέσεις παίρνουμε $u(x)\le 2^{n^k}u(y)$

$\rho_\varepsilon(x)$ ομαλοποιητές

(i) $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$

(ii) $supp(\rho_\varepsilon)=\overline{B}(\varepsilon)$

(iii) $0\le \rho_\varepsilon \le 1$

(iv) ρ_ε ακτινικά συμμετρική

(v) $\int_{\mathbb{R}^n}\rho_\varepsilon(x)\,dx = 1$

Έστω Ω χωρίο στον $\mathbb{R}^n$, για $\varepsilon>0$ θέτουμε

$\Omega_\varepsilon = \{x\in\Omega : dist(x,\partial\Omega)>\varepsilon\}$

$\Omega^\varepsilon = \{x\in\mathbb{R}^n : dist(x,\Omega)\le\varepsilon\}$ $\Omega_\varepsilon \subset \Omega \subset \Omega^\varepsilon$

Για κάθε $u\in L^1_{loc}(\Omega)$ ορίζουμε μια συνάρτηση u_ε στο Ω_ε με τη σχέση

$u_\varepsilon(x) = \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy$ $x\in\Omega_\varepsilon$ $\left(\int_{B(x,\varepsilon)}\rho_\varepsilon(x-y)u(y)\,dy\right)$

Παρατήρηση: Για $x\in\Omega_\varepsilon$ έχουμε $B(x,\varepsilon)\subset\subset\Omega$ άρα $u\in L^1(B(x,\varepsilon))$ άρα το ολοκλήρωμα υπάρχει

Συμβολισμός: $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ n-άδα μη αρνητικών φυσικών αριθμών

$|\alpha| = \sum_{k=1}^n \alpha_k$ μήκος ή τάξη πολυδείκτη

Αν $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ θέτουμε $D^{\alpha}u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} u$

Πρόταση: Έστω $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ και u_ε οι αντίστοιχες ομαλοποιημένες συναρτήσεις. Τότε:

(i) $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$

(ii) αν $u \in C^k(\Omega)$ τότε $D^\alpha u_\varepsilon = (D^\alpha u)_\varepsilon \quad |\alpha| \leq k$

(iii) αν $u \in C(\Omega)$ τότε $u_\varepsilon \to u \quad (\varepsilon \to 0^+)$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω

(iv) αν $u \in C^k(\Omega)$ τότε $D^\alpha u_\varepsilon \longrightarrow D^\alpha u \quad |\alpha| \leq k$ ομοιόμορφα στα συμπαγή υποσύνολα του Ω.

Μάθημα 4º Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι 21/3/2019

Άσκηση 5: Να δειχθεί ότι η Λαπλασιανή είναι αναλλοίωτη σε ορθογώνιους μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ και S είναι ο γραμμικός τελεστής $(Su)(x) = u(Tx)$, τότε $\Delta S = S\Delta$

Λύση:

Υπάρχει ορθογώνιος πίνακας (α_{ij}) τ.ω $y_i = (Tx)_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i$

Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, και έστω $v = Su$, έχουμε τότε

$v(x) = (Su)(x) = u(Tx)$

Άρα $v_{x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} u_{y_j}(Tx) \dfrac{\partial (Tx)_j}{\partial x_i}$

• $\dfrac{\partial (Tx)_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial y_j}{\partial x_i} = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{jk} x_k\right) = \alpha_{ji}$

$\Rightarrow v_{x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} u_{y_j}(Tx)$

Άρα $v_{x_i x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} \sum_{k=1}^{n} u_{y_j y_k} \dfrac{\partial (Tx)_k}{\partial x_i} = \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{ji}\alpha_{ki} u_{y_j y_k}$

Άρα $(\Delta Su)(x) = (\Delta v)(x) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \alpha_{ji}\alpha_{ki} u_{y_j y_k} \overset{\text{λόγω ορθογωνιότητας}}{=} \sum_{j,k=1}^{n} u_{y_j y_k} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ji}\alpha_{ki}}_{\delta_{jk}}$

$= (\Delta u)(y) = (\Delta u)(Tx) = (S\Delta u)(x)$

Άσκηση 6: Έστω u C^2 συνάρτηση στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και $v(x) = |x|^{2-n} u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$, $x \neq 0$

Δείξτε ότι $(\Delta v)(x) = |x|^{-n-2} (\Delta u)\left(\frac{x}{|x|^2}\right)$

και συμπεράνετε ότι η v είναι αρμονική αν και μόνο αν η u είναι αρμονική

Λύση:

Χρήσιμη σχέση: $\dfrac{\partial}{\partial x_i}|x|^\alpha = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(|x|^2\right)^{\alpha/2} = \dfrac{\alpha}{2}|x|^{2\left(\frac{\alpha}{2}-1\right)} 2x_i = \alpha |x|^{\alpha-2} x_i$

$$\boxed{\nabla |x|^\alpha = \alpha |x|^{\alpha-2} x}$$

Έχουμε $v_{x_i}(x) = (2-n)|x|^{-n} x_i u + |x|^{2-n} \sum_j u_{y_j} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{x_j}{|x|^2}\right)$

$\bullet \ \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(|x|^{-2}x_j\right) = -2|x|^{-4}x_i x_j + |x|^{-2}\delta_{ij}$

Άρα $v_{x_i}(x) = (2-n)|x|^{-n}x_i u + |x|^{2-n}\sum_j u_{y_j}\left(-2|x|^{-4}x_i x_j + |x|^{-2}\delta_{ij}\right)$

$$
\begin{aligned}
v_{x_i x_i}(x) = {} & (2-n)\Big[-n|x|^{-n-2}x_i^2 u + |x|^{-n}u + |x|^{-n}x_i \sum_j u_{y_j}\left(-2|x|^{-4}x_i x_j + |x|^{-2}\delta_{ij}\right)\Big] \\
& - 2\sum_j \Big[\sum_k u_{y_j y_k}\left(-2|x|^{-4}x_i x_k + |x|^{-2}\delta_{ik}\right)|x|^{-n-2}x_i x_j \\
& - (n+2)|x|^{-n-4}x_i^2 x_j + u_{y_j}|x|^{-n-2}x_j + u_{y_j}|x|^{-n-2}x_i\delta_{ij}\Big] \\
& + \sum_j u_{y_i y_j}\left(-2|x|^{-4}x_i x_j + |x|^{-2}\delta_{ij}\right)|x|^{-n} - n|x|^{-n-2}x_i u_{y_i}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Άρα } \Delta v = {} & (2-n)\cancel{(-n)}|x|^{-n}u + n\cancel{(2-n)}|x|^{-n}u - 2(2-n)\sum_j |x|^{-n-2}u_{y_j}x_i \\
& + (2-n)|x|^{-n-2}\sum_i x_i u_{y_i} + 4|x|^{-n-6} - 6\sum_{i,j,k} x_i^2 x_j x_k u_{y_j y_k} \\
& - 2|x|^{-n-4}\sum_{i,j,k}\delta_{ik}x_i x_j u_{y_j y_k} + 2(n+2)|x|^{-n-2}\sum_j u_{y_j}x_j \\
& - 2n|x|^{-n-2}\sum_j u_{y_j}x_j - 2|x|^{-n-2}\sum_j u_{y_j}x_j - 2|x|^{-n-4}\sum_{i,j}x_i x_j u_{y_i y_j} \\
& + |x|^{-n-2}\sum_j u_{y_j y_j} - n|x|^{-n-2}\sum_i x_i u_{y_i} \\
= {} & |x|^{-n-2}(\Delta u)\left(\tfrac{x}{|x|^2}\right)
\end{aligned}
$$

Ορισμός: Η συνάρτηση $\psi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\log|x| & n=2 \\ \frac{1}{n(n-2)\alpha_n}|x|^{2-n} & n\geq 3 \end{cases} \quad x\neq 0$

ονομάζεται θεμελιώδης λύση της εξίσωσης Laplace

Ισχύει $\Delta\psi = 0$ στο $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

Πρόταση. Έστω $f\in C_c^2(\mathbb{R}^n)$ και $u(x) \int_{\mathbb{R}^n}\psi(x-y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)f(x-y)\,dy$, $x\in\mathbb{R}^n$

Η u είναι C^2 και ισχύει $-\Delta u = f$

Απόδειξη:

Μπορούμε να παραγωγίσουμε κάτω από το ολοκλήρωμα και παίρνουμε ότι η u είναι C^2 και

$$(\Delta u)(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\psi(y)(\Delta f)(x-y)\,dy = \int_{|y|<\varepsilon}\psi(y)(\Delta f)(x-y)\,dy + \int_{|y|>\varepsilon}\psi(y)(\Delta f)(x-y)\,dy$$

$= I_\varepsilon + J_\varepsilon$

Υποθέτουμε ότι $n \geq 3$. Έχουμε

$$|I_\varepsilon| \leq \int_{|y|<\varepsilon} \psi(y)\, |(\Delta f)(x-y)|\, dy \leq \max_{\mathbb{R}^n} |\Delta f|\, c_n \int_{|y|<\varepsilon} |y|^{2-n} dy$$

$$= M c_n \int_0^\varepsilon \int_{\partial B(r)} |y|^{2-n} dS(y) = M c_n\, n \cdot \alpha_n \int_0^\varepsilon r^{n-1} r^{2-n} dr = c_n' M \varepsilon^2 \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Ταυτότητα Green

$$J_\varepsilon = \int_{|y|>\varepsilon} \underbrace{(\Delta\psi)(y)}_{0} f(x-y)\, dy + \underbrace{\int_{|y|=\varepsilon} \psi(y) \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x-y)\, dS(y)}_{L_\varepsilon} - \underbrace{\int_{|y|=\varepsilon} \frac{\partial \psi(y)}{\partial \vec{n}} f(x-y)\, dS(y)}_{S_\varepsilon}$$