Μάθημα 8ο   Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Μπαρμπάτης   18/4/2019

Άσκηση 8: Έστω $n \geq 3$, $\beta > \alpha > 0$ και $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha < |x| < \beta\}$

Έστω $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ αρμονική στο Ω και $M(r) = \max\limits_{|x|=r} u$, $r \in [\alpha, \beta]$

Να δειχθεί ότι:

$$M(r) \leq \frac{M(\alpha)(r^{2-n} - \beta^{2-n}) + M(\beta)(\alpha^{2-n} - r^{2-n})}{\alpha^{2-n} - \beta^{2-n}} \quad (*), \quad r \in [\alpha, \beta]$$

Λύση:

Η αρχή μεγίστου μας λέει $\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\partial\Omega} u = \{M(\alpha), M(\beta)\}$

$\Rightarrow M(r) \leq \max\{M(\alpha), M(\beta)\}$

Την $(*)$ την γράφω $\mu(r) M(\alpha) + (1 - \mu(r)) M(\beta)$, $0 \leq \mu(r) \leq 1$

$\mu(\alpha) = 1$, $\mu(\beta) = 0$

Θεωρώ

$V(x) = u(x) - \lambda |x|^{2-n}$ $\lambda \in \mathbb{R}$

Η V είναι αρμονική και $V \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,

εφαρμόζω Ασθενή αρχή μεγίστου

$$\max_{|x|=r} V \leq \max_{\overline{\Omega}} V = \max_{\partial\Omega} V = \max\left(\max_{|x|=\alpha} V, \max_{|x|=\beta} V\right)$$

$$\max_{|x|=r} V = \max_{|x|=r} u - \lambda r^{2-n} = M(r) - \lambda r^{2-n}$$ άρα

$$M(r) - \lambda r^{2-n} \leq \max\{M(\alpha) - \lambda \alpha^{2-n}, M(\beta) - \lambda \beta^{2-n}\} \Leftrightarrow$$

$$M(r) \leq \max\{M(\alpha) - \lambda(\alpha^{2-n} - r^{2-n}), M(\beta) - \lambda(\beta^{2-n} - r^{2-n})\}$$

θέλω να ελαχιστοποιήσω το μέγιστο, αυτό γίνεται αν οι 2 ποσότητες είναι ίσες, άρα έχουμε

$$M(\alpha) - \lambda(\alpha^{2-n} - r^{2-n}) = M(\beta) - \lambda(\beta^{2-n} - r^{2-n}) \Leftrightarrow$$

$$\lambda(\beta^{2-n} - \alpha^{2-n}) = M(\beta) - M(\alpha) \Rightarrow \lambda = \frac{M(\beta) - M(\alpha)}{\beta^{2-n} - \alpha^{2-n}}$$

Άρα $$M(r) \leq M(\alpha) - \frac{(M(\beta) - M(\alpha))}{\beta^{2-n} - \alpha^{2-n}}(\alpha^{2-n} - r^{2-n}) = \frac{M(\alpha)(\beta^{2-n} - \alpha^{2-n}) - (M(\beta) - M(\alpha))(\alpha^{2-n} - r^{2-n})}{\beta^{2-n} - \alpha^{2n}}$$

από το οποίο προκύπτει το ζητούμενο

Άσκηση 9: Να δειχθεί ότι αν η συνάρτηση u είναι αρμονική στο $\mathbb{R}^n$ και $\int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx < +\infty$, τότε η u είναι η μηδενική συνάρτηση

Λύση:

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Τότε $\forall r > 0$

$$|\nabla u(x_0)| \leq \frac{C_n}{r^{n+1}} \int_{B(x_0,r)} |u(y)| dy \overset{CS}{\leq} \frac{C_n}{r^{n+1}} \left(\int_{B(x_0,r)} u^2 dy \right)^{1/2} \left(\int_{B(x_0,r)} dy \right)^{1/2}$$

$$\leq \frac{C_n}{r^{n+1}} (M)^{1/2} (\alpha_n r^n)^{1/2} \xrightarrow{r\to\infty} 0 \qquad \left(M = \int_{\mathbb{R}^n} u^2 dx \right)$$

Άρα η u σταθερή, άρα η $u = 0$.

Μέθοδοι Ενέργειας

Ολοκλήρωμα Ενέργειας: $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx$

Θεωρούμε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο με C^1 σύνορο

Πρόταση: Έστω $f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$, τότε κάθε ένα από τα προβλήματα:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases} \quad \text{και} \quad \begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

έχει το πολύ μία λύση $C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ (στο 2: μέχρι προσθετικής σταθεράς)

Λύση:

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο λύσεις u_1, u_2. Τότε η $v = u_2 - u_1$ είναι λύση του αντίστοιχου ομογενούς προβλήματος

$$\begin{cases} \Delta v = 0 \\ v = 0 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} \Delta v = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial \vec{n}} = 0 \end{cases}$$

άρα

$$\int_\Omega v \Delta v \, dx = 0$$

$$-\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \overbrace{\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial v}{\partial n} dS}^{=0} \Rightarrow \int_\Omega |\nabla v|^2 dx = 0 \Rightarrow v = \text{σταθ}$$

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Μπαρμπάτης 18/4/2019

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο με C^1 σύνορο και το πρόβλημα Dirichlet

$$(D)\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{στο } \Omega \\ u = g, & \text{στο } \partial\Omega \end{cases}$$

$f \in C(\Omega)$, $g \in C(\partial\Omega)$

Ορίζουμε $I[w] = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla w|^2 - wf\right) dx$ (συναρτησιακό ενέργειας)

για w στο $\mathcal{A} = \{ w \in C^2(\Omega) \cap C^1(\Omega) : w = g \text{ στο } \partial\Omega \}$

Θεώρημα (αρχή του Dirichlet)

Μια συνάρτηση $u \in \mathcal{A}$ είναι λύση του (D) αν και μόνο αν $I[u] = \min\limits_{w \in \mathcal{A}} I[w]$

Απόδειξη:

($\Longrightarrow$) Έχουμε $\forall\, w \in \mathcal{A}$, $0 = \int_\Omega \overbrace{(\Delta u + f)}^{0 \text{ από } (D)} (u-w)\, dx$

κάνουμε ολοκλήρωση κατά παράγοντες.

$$\int_\Omega (\Delta u + f)(u-w)dx = \int_\Omega \left(-\nabla u \cdot \nabla(u-w) + f(u-w)\right)dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} \overbrace{\cancel{(u-w)}}^{0 \text{ αφού } \in \mathcal{A}} dS$$

$$= \int_\Omega (-|\nabla u|^2 + fu)\, dx + \int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla w - fw)\, dx$$

Ξέρω ότι $\alpha \cdot \beta \leq \frac{1}{2}(|\alpha|^2 + |\beta|^2) \implies 0 \leq \int_\Omega (-|\nabla u|^2 + f(u))dx + \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}|\nabla w|^2 - fw\right)dx$

$\implies 0 \leq I[w] - I[u] \implies I[u] \leq I[w]$, $\forall\, w \in \mathcal{A}$

($\Longleftarrow$) Θα δείξουμε ότι $-\Delta u = f$

Θεωρούμε τυχαία $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε $u + t\varphi \in \mathcal{A}$

Άρα η συνάρτηση $h(t) = I[u + t\varphi]$, $t \in \mathbb{R}$ έχει ολικό ελάχιστο στο $t = 0$.

Έχουμε $h(t) = \int_\Omega \left[\frac{1}{2}|\nabla u + t\Delta\varphi|^2 - (u + t\varphi)f\right] dx = \int_\Omega \left(\frac{1}{2}|\nabla u|^2 + \frac{1}{2}t^2|\nabla\varphi|^2 + t\nabla u \cdot \nabla\varphi - uf - t\varphi f\right)dx$

άρα h παραγωγίσιμη και $h'(0) = 0$ $\quad (h(t) = At^2 + Bt + \Gamma \implies h'(t) = 2At + B \implies h'(0) = B)$

άρα $\int_\Omega (\nabla u \cdot \nabla\varphi - \varphi f)\, dx = 0 \implies \int_\Omega (-\Delta u - f)\varphi\, dx = 0 \quad \forall\, \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$\overset{\text{άσκηση}}{\implies} -\Delta u = f$ στο Ω

Ελλειπτικοί διαφορικοί τελεστές με μεταβλητούς συντελεστές

Έστω Ω χωρίο του $\mathbb{R}^n$

Γενική μορφή γραμμικού ελλειπτικού τελεστή στο Ω

$$(Lu)(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u(x)$$

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις a_{ij}, b_i, c είναι ομαλές και φραγμένες, $a_{ij}=a_{ji}$
Επίσης υποθέτουμε ότι ο L είναι ομοιόμορφα ελλειπτικός
Δηλαδή $\exists\ \theta \geq 1$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{\theta}|\xi|^2 \leq \sum a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \theta |\xi|^2 \quad , \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n\ \forall\ x \in \Omega \quad (1)$$

Παρατήρηση: Η (1) σημαίνει ισοδύναμα ότι $\forall\ x \in \Omega$ οι ιδιοτιμές του πίνακα $\{a_{ij}(x)\}$ ανήκουν στο $[\frac{1}{\theta}, \theta]$