Μάθημα 11ο   Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Μπαρμπάτης   23/5/2019

Εξίσωση Θερμότητας

$u_t = \Delta u$ $\qquad\qquad u = u(x,t)$

$(\Delta u = u_{x_1x_1} + \dots + u_{x_nx_n})$ $\qquad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

$\qquad\qquad t \in I \in \mathbb{R}$

Συμβολισμός: Για $T>0$ θέτουμε $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$ (παραβολικός κύλινδρος)
$(x,t) \in \Omega_T$

Ορισμός. Η συνάρτηση $\Phi(x,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t>0$
ονομάζεται θεμελιώδης λύση της εξίσωσης της θερμότητας.

Πρόταση: Η $\Phi(x,t)$ είναι λύση της εξίσωσης θερμότητας

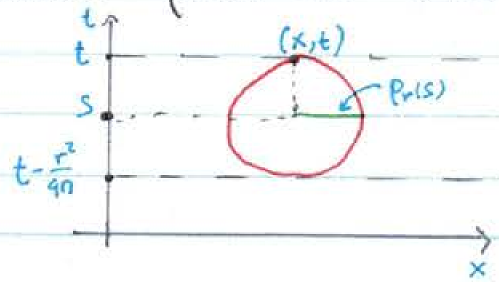
Ορισμός. Έστω $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}$ και $r>0$. Το σύνολο
$E(x,t,r) = \{(y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} : s<t,\ \Phi(x-y,t-s) > r^{-n}\}$
ονομάζεται παραβολική μπάλα με κέντρο το (x,t) και ακτίνα $r>0$.
Γράφουμε $E(r) = E(0,0,r)$

$$(4\pi(t-s))^{-n/2} \cdot e^{-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)}} > r^{-n} \iff -\frac{|x-y|^2}{4(t-s)} > \log\left[r^{-n}\, 4\pi(t-s)^{n/2}\right] \iff$$

$$-\frac{|x-y|^2}{4(t-s)} > -\frac{n}{2}\log\left(\frac{r^2}{4\pi(t-s)}\right) \iff |x-y|^2 < 2n(t-s)\log\left(\frac{r^2}{4\pi(t-s)}\right) = \rho_r^2(s)$$

Άρα πρέπει $r^2 > 4\pi(t-s) \iff \frac{r^2}{4\pi} > t-s \iff s > t - \frac{r^2}{4\pi}$

Άρα $E(x,t,r) = \{(y,s) : t - \frac{r^2}{4\pi} < s < t,\ |x-y| < \rho_r(s)\}$
Ισχύει $\rho_r(s) \to 0$ όταν $s \to t$ ή $s \to t - \frac{r^2}{4\pi}$



Παρατήρηση: $(y,s)\in E(1) \iff (ry, r^2 s)\in E(r)$

$(u(x,t)$ λύση $\iff u(\lambda x, \lambda^2 t)$ λύση$)$

Λήμμα: Για κάθε παραβολική μπάλα $E(x,t,r)$ ισχύει

$$\frac{1}{4r^n}\iint_{E(x,t,r)} \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\,dy\,ds = 1$$

Απόδειξη:

Αρκεί να δειχθεί για $E(x,t,r)=E(1)$

Έχουμε: $\frac{1}{4}\iint_{E(1)} \frac{y^2}{s^2}\,dy\,ds = \frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{4\pi}}^{0}\int_{B(\rho(s))} |y|^2\,dy\,ds =$

$$= \frac{1}{4}\int_{-1/4\pi}^{0} \frac{1}{s^n}\, b_n \int_0^{\rho(s)} \tau^{2+n-1}\,d\tau\,ds = \frac{b_n}{4(n+2)}\int_{-1/4\pi}^{0} \frac{\rho(s)^{n+2}}{s^2}\,ds =$$

$$\frac{(2n)^{\frac{n+2}{2}} b_n}{4(n+2)} \int_{-1/4\pi}^{0} s^{\frac{n-2}{2}} \left(\log\frac{1}{4\pi s}\right)^{\frac{n+2}{2}} ds =$$

θέτω $t = \log\frac{1}{4\pi s} \rightarrow \frac{1}{4\pi s} = e^t \rightarrow s = \frac{1}{4\pi}e^{-t}$

άρα $ds = \frac{1}{4\pi}(-e^{-t})\,dt$

$$= \frac{(2n)^{\frac{n+2}{2}} b_n}{4(n+2)} \int_0^{\infty} \left(\frac{1}{4\pi}e^{-t}\right)^{\frac{n-2}{2}} t^{\frac{n+2}{2}} \frac{1}{4\pi} e^{-t}\,dt = \ldots = 1$$

Θεώρημα (Θεώρημα Μέσης Τιμής)

Έστω ότι η u είναι λύση της $u_t = \Delta u$ στο $\underline{\Omega}_T = \underline{\Omega}\times(0,T)$

Για κάθε παραβολική μπάλα $E(x,t,r) \subset\subset \underline{\Omega}_T$ ισχύει

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n}\iint_{E(x,t,r)} \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, u(y,s)\,dy\,ds$$

Απόδειξη:

Υποθέτουμε ότι $(x,t)=(0,0)$

Ορίζουμε $\varphi(r) = \frac{1}{4r^n}\iint_{E(r)} \frac{|y'|^2}{s'^2}\, u(y',s')\,dy'ds'$

Αρκεί να δείξουμε ότι $\varphi(r)$ σταθερή

Θέτουμε $y' = ry$, $s' = r^2 s$

$(y',s')\in E(r) \iff (y,s)\in E(1)$

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Μπαρμπάτης   23/5/2019

$dy' = r^n dy$, $ds' = r^2 ds$

Άρα $\varphi(r) = \frac{1}{4r^n}\iint_{E(1)} \frac{r^2|y|^2}{r^4 s^2}\, u(ry, r^2 s)\, r^{n+2}\, dy\, ds$

$= \frac{1}{4} \iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\, u(ry, r^2 s)\, dy\, ds$

Άρα $\varphi'(r) = \frac{1}{4}\iint_{E(1)} \frac{|y|^2}{s^2}\left[\sum_i u_{y_i} y_i + u_s\, 2rs\right] dy\, ds$

$= \frac{1}{4r^{n+1}}\iint_{E(r)} \left[\sum_i u_{y_i} y_i + 2s u_s\right]\frac{|y|^2}{s^2}\, dy\, ds = \frac{1}{4r^{n+1}}(I_1 + I_2)$

Ορίζουμε $\psi(y,s) = \log(\Phi(y,-s)r^n) = -\frac{n}{2}\log(-4\pi s) + \frac{|y|^2}{4s} + n\log r$

ισχύει $\psi(y,s) = 0$ στο $\partial E(r)$

Έχουμε

$\psi_{y_i} = y_i/2s$ $\psi_s = -n/2s - |y|^2/4s^2$

Άρα $I_2 = 2\iint_{E(r)} u_s \frac{|y|^2}{s}\, dy\, ds = 2\iint_{E(r)} \frac{u_s}{s}\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot 2s\,\psi_{y_i}\, dy\, ds =$

$= 4\iint_{E(r)} u_s \sum_{i=1}^{n} y_i \psi_i\, dy\, ds \overset{\text{ολοκλήρωση κατά παράγοντες}}{=} -4\iint_{E(r)} \sum_i \left[u_s + u_{sy_i} y_i\right]\psi\, dy\, ds$

$= -4\iint_{E(r)} \left(n u_s + \sum_{i=1}^{n} y_i u_{sy_i}\right)\psi\, dy\, ds$

$= 4\iint_{E(r)} \left(-n u_s \psi + \sum_{i=1}^{n} y_i u_{y_i}\psi_s\right) dy\, ds = -4\iint_{E(r)} \left[n u_s\psi + \sum_{i=1}^{n} y_i u_{sy_i}\left(\frac{n}{2s} - \frac{|y|^2}{4s^2}\right)\right] dy\, ds$

$= -4 \underbrace{\iint_{E(r)} n u_s \psi + \sum_i y_i u_{y_i}\frac{n}{2s}\Big]\, dy\, ds}_{J} - I_1$

πρέπει $J = 0$

Αφού u λύση της εξίσωσης θερμότητας

$J = \iint_{E(r)} \left[n\psi\Delta u + \frac{n}{2s} y\cdot\nabla u\right] dy\, ds = \iint \left[-n\nabla\psi\cdot\nabla u + \frac{n}{2s} y\cdot\nabla u\right] dy\, ds$

όμως $\nabla\psi = \frac{y}{2s}$ Άρα $J = 0$