ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ STURM–LIOUVILLE

Έστω $p \in C^1([a,b])$ με $p(x) > 0$ για $x \in [a,b]$ και $q \in C([a,b])$, όπου (a,b) φραγμένο διάστημα στον $\mathbb{R}$.

Ο γραμμικός συνήθης διαφορικός τελεστής $2^{ης}$ τάξης

$$L := \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d}{dx}\right) + q(x),$$

ονομάζεται τελεστής Sturm–Liouville.

Έστω $\sigma \in C([a,b])$ με $\sigma(x) > 0$ για $x \in [a,b]$ ("συνάρτηση βάρους") και $\lambda \in \mathbb{C}$.

Θεωρούμε τη σ.δ.ε.

$$(1) \qquad Lu = -\lambda\sigma(x)u \ , \ x \in (a,b),$$

και τις χωριζόμενες ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$(2) \begin{cases} A_1 u(a) + B_1 u'(a) = 0 \ , \ A_1, B_1 : \text{σταθ.} : |A_1| + |B_1| > 0, \\ A_2 u(b) + B_2 u'(b) = 0 \ , \ A_2, B_2 : \text{σταθ.} : |A_2| + |B_2| > 0. \end{cases}$$

Το πρόβλημα συνοριακών τιμών (ΠΣΤ) $\{(1),(2)\}$ με τις ανωτέρω υποθέσεις λέγεται κανονικό ή ομαλό πρόβλημα Sturm–Liouville.

Είναι προφανές ότι η $u = 0$ είναι λύση για κάθε τιμή του λ.

Εκείνες οι τιμές του λ για τις οποίες υπάρχουν μη μηδενικές λύσεις ονομάζονται ιδιοτιμές και οι αντίστοιχες λύσεις ονομάζονται ιδιοσυναρτήσεις του ΠΣΤ $\{(1),(2)\}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το εσωτερικό γινόμενο με βάρος σ

$$(f,g)_\sigma := \int_a^b f(x)g(x)\sigma(x)\,dx$$

και την επαγόμενη νόρμα με βάρος σ

$$\|f\|_\sigma := \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\sigma(x)\,dx}.$$

Υπενθυμίζεται ο ορισμός του δέλτα του Kronecker

$$\delta_{nm} := \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases} \quad , \quad n, m = 1, 2, \dots .$$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΙΔΙΟΤΙΜΩΝ ΚΑΙ ΙΔΙΟΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

1 Οι ιδιοτιμές του ΠΣΤ $\{(1),(2)\}$ είναι πραγματικές, απλές, αριθμήσιμες, διατεταγμένες και υπάρχει ελάχιστη ιδιοτιμή, δηλ. μπορούμε να γράψουμε

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$$

Επιπλέον,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty .$$

---

2 Έστω λ_n ιδιοτιμή με αντίστοιχη ιδιοσυνάρτηση $\phi_n(x)$. Η ϕ_n έχει ακριβώς $n-1$ σημεία μηδενισμού στο (a,b).

---

3 Οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες :

$$(\phi_n, \phi_m)_\sigma = (\phi_n, \phi_n)_\sigma \, \delta_{nm} \quad , \quad n,m = 1,2,\dots .$$

---

4 Το σύνολο των ιδιοσυναρτήσεων είναι πλήρες, δηλ. κάθε $f \in L^2_\sigma(a,b)$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως γενικευμένη σειρά Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) ,$$

όπου

$$c_n = \frac{(f,\phi_n)_\sigma}{(\phi_n,\phi_n)_\sigma}$$

είναι οι γενικευμένοι συντελεστές Fourier.

Σημείωση: $f : [a,b] \to \mathbb{R} \in L^2_\sigma(a,b) \underset{\text{ορσ}}{\Longleftrightarrow} \int_a^b |f(x)|^2 \sigma(x)\,dx < \infty.$

Ο $L^2_\sigma(a,b)$ αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας συναρτήσεων που είναι ίσες σχεδόν παντού (δηλ. διαφέρουν το πολύ σ' ένα σύνολο μέτρου μηδέν). Αν μια L^2_σ συνάρτηση μπορεί να αναπαρασταθεί με μια συνεχή συνάρτηση f, τότε η f είναι ο μόνος συνεχής αντιπρόσωπος.

---

5 Το Πηλίκο Rayleigh

Ορισμός: $RQ[v] := -\dfrac{\int_a^b v L v \, dx}{\int_a^b v^2 \sigma \, dx}$

$$\boxed{RQ[y] := \frac{y^T A y}{y^T y} , \quad y \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}}$$

Παρατήρηση

Αναλογία με τη Γραμμική Άλγεβρα

Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times m} : A = A^T$.

Πρόβλημα Ιδιοτιμών : $Ax = \lambda x$, $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$

x : ιδιοδιάνυσμα $\Rightarrow RQ[x] = \lambda$

Ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες για το RQ :

(i) $$\lambda_n = \frac{\left[-p(x)\phi_n(x)\phi_n'(x)\right]\Big|_a^b - \int_a^b \left[p(x)\left(\phi_n'(x)\right)^2 - q(x)\left(\phi(x)\right)^2\right]dx}{(\phi_n, \phi_n)_\sigma}$$

$$= RQ[\phi_n].$$

(ii) Αρχή Ελαχιστοποίησης

$$\lambda_1 = \min_{\begin{cases} u\in C(a,b),\ u\neq 0 \\ u \text{ ικανοποιεί τις (2)}\end{cases}} RQ[u]$$

Το ελάχιστο λαμβάνεται μόνο για $u = \phi_1$.

$$\lambda_2 = \min_{\begin{cases} u\in C(a,b),\ u\neq 0 \\ u \text{ ικανοποιεί τις (2)} \\ (u, \phi_1)_\sigma = 0\end{cases}} RQ[u]$$

και ανάλογες εκφράσεις για τις επόμενες ιδιοτιμές.

$\boxed{6}$ Η Ταυτότητα του Lagrange

$$uLv - vLu = \frac{d}{dx}\left(p\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right).$$

$\boxed{7}$ Ο Τύπος του Green

$$\int_a^b (uLv - vLu)\,dx = \left[p\left(u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}\right)\right]\Big|_a^b.$$

Σημείωση : Η συνάρτηση $u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx}$ είναι η ορίζουσα Wronski των u και v.

Υπάρχει μεγάλο ενδιαφέρον και για τις περιοδικές συνοριακές συνθήκες

$$(3)\ \begin{cases} u(a) = u(b), \\ u'(a) = u'(b), \end{cases}$$

με την επιπρόσθετη συνθήκη

$$(3p)\quad p(a) = p(b).$$

Οι ιδιότητες που αναφέραμε για το ΠΣΤ ((1),(2)) ισχύουν γενικώς (με "μικροδιαφορές") και για το ΠΣΤ ((1),(3),(3p)).

Π.χ. στην αντίστοιχη ιδιότητα της $\boxed{1}$, οι ιδιοτιμές δεν είναι αναγκαστικά απλές, αλλά ισχύει

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \cdots .$$

Αν ισχύει μία (ή περισσότερες) από τις ακόλουθες συνθήκες:

(S1) Το (a,b) είναι μη φραγμένο διάστημα,

(S2) Για κάποιο $x_0 \in (a,b)$ ισχύει $p(x_0)=0$ ή/και $\sigma(x_0)=0$,

(S3) Ένας τουλάχιστον από τους συντελεστές της (1) απειρίζεται στο a ή/και στο b,

το ΠΣΤ ((1),(2)) ή ((1),(3),(3p)) ονομάζεται ιδιόμορφο πρόβλημα Sturm-Liouville.

Τυπικά παραδείγματα (μεγάλου ενδιαφέροντος) αποτελούν οι διαφορικές εξισώσεις:

- $\dfrac{d}{dx}\left((1-x^2)\dfrac{du}{dx}\right)+\lambda u=0$, $x\in(-1,1)$: δ.ε. Legendre.
- $\dfrac{d}{dx}\left(x\dfrac{du}{dx}\right)+\left(\lambda x-\dfrac{\mu^2}{x}\right)u=0$, $x\in(0,b)$: δ.ε. Bessel.
- $\dfrac{d^2u}{dx^2}-2x\dfrac{du}{dx}+\lambda u=0$, $x\in(-\infty,\infty)$: δ.ε. Hermite.

Ας σημειωθεί ότι υπάρχουν τουλάχιστον 50 (!!) επώνυμες διαφορικές εξισώσεις τύπου Sturm-Liouville που αναφέρονται σε ομαλά ή ιδιόμορφα ΠΣΤ.