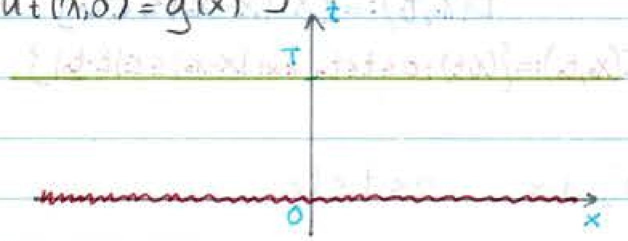
Μάθημα 5º ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Στρατής 19/3/2019

Καλώς και Μη-Καλώς τοποθετημένα προβλήματα για την κυματική εξίσωση

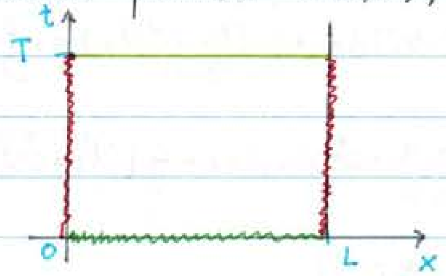
1 Π.Α.Τ (ή πρόβλημα Cauchy) : Καλώς τοποθετημένο

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(x,t), & x \in \mathbb{R}, \quad 0<t<T \\ u(x,0) = f(x) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \quad x \in \mathbb{R}$$



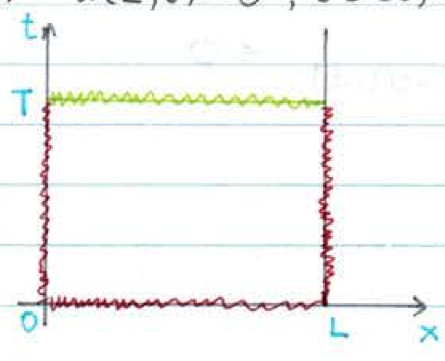
2 Π.Α.Σ.Τ : Καλώς τοποθετημένο

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = F(x,t), & x \in (0,L), \ t \in (0,T) \\ u(x,0) = f(x) & 0 \le x \le L \\ u_t(x,0) = g(x) \\ \Sigma\Sigma \ (\text{σχέση μεταξύ } u(0,t), u(L,t)) & 0 \le t \le T \end{cases}$$



3 Πρόβλημα Dirichlet : Μη καλώς τοποθετημένο

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = 0, & x \in (0,L), \ t \in (0,T) \\ u(x,0) = 0 & x \in [0,L] \\ u(x,T) = 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t \in (0,T) \end{cases}$$



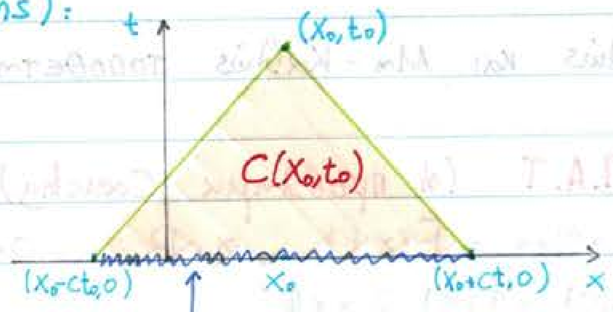
- $T/L = m/n \in \mathbb{Q}$: Το πρόβλημα έχει άπειρες λύσεις $u_{mn}(x,t) = A_{mn} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{m\pi t}{T}\right)$
- $T/L \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Το πρόβλημα έχει μόνο τη μηδενική λύση.

Θεώρημα (Πεπερασμένη ταχύτητα διάδοσης):

$u_{tt} - c^2 \cdot u_{xx} = 0 \qquad c>0$: σταθερά

$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= g(x) \equiv 0 \\ u_t(x,0) &= h(x) \equiv 0 \end{aligned}\right\}$ στο $B(x_0,t_0)$

Τότε η $u(x,t) \equiv 0$ στο $C(x_0,t_0)$



$B(x_0,t_0) := \{x : |x-x_0| \le ct_0\}$

$C(x_0,t_0) := \{(x,t) : 0 \le t \le t_0$ και $|x-x_0| \le c|t-t_0|\}$

Απόδειξη.

Ορίζω $0 \le e(t) := \frac{1}{2}\int_{B(x_0,t_0-t)} [u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)]\,dx \qquad 0 \le t \le t_0$

η ενέργεια της u στο χρόνο t για $x \in [x_0 - c(t_0-t), x_0 + c(t_0-t)]$

Η $e(0)$ η ενέργεια της u στο χρόνο 0 για $x \in B(x_0,t_0)$

Επειδή $g(x) = h(x) \equiv 0$ στο $B(x_0,t_0) \Rightarrow e(0) = 0$

Θέλουμε να δείξουμε $e(t) \le e(0) \;\; \forall\, t \in [0,t_0]$

Αν ισχύει τότε $e(t) \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0$ στο $C(x_0,t_0)$

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_{x-c(t_0-t)}^{x+c(t_0-t)} [u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)]\,dx = \frac{1}{2}\left\{\int_{x_0}^{x_0+c(t_0-t)} (u_t^2 + u_x^2)\,dx + \int_{x_0-c(t_0-t)}^{x_0} (u_t^2 + c^2 u_x^2)\,dx\right\}$$

$$e'(t) = \int_{x_0}^{x_0+c(t_0-t)} (u_t \cdot u_{tt} + c^2 u_x u_{xt})\,dx - \frac{c}{2}\left[u_t^2 + c^2 u_x^2\right]\Big|_{x=x_0+c(t_0-t)} + \int_{x_0-c(t_0-t)}^{x_0} (u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt})\,dx - \frac{c}{2}\left[u_t^2 + c^2 u_x^2\right]\Big|_{x=x_0-c(t_0-t)}$$

$$= \int_{x_0-c(t_0-t)}^{x_0+c(t_0-t)} (u_t \cdot u_{tt} + c^2 u_x u_{xt})\,dx - \frac{c}{2}\left[u_t^2 + c^2 u_x\right]\Big|_{x=x_0+c(t_0-t)} - \frac{c}{2}\left[u_t^2 + c^2 u_x^2\right]\Big|_{x=x_0-c(t_0-t)}$$

$$= \int_{x_0-c(t_0-t)}^{x_0+c(t_0-t)} \overbrace{(u_t \cdot u_{tt} - c^2 u_t u_{xx})}^{0}\,dx + c^2\left[u_x u_t\right]\Big|_{x=x_0-c(t_0-t)}^{x_0+c(t_0-t)} - \frac{c}{2}\left[u_t^2 + c^2 u_x^2\right]\Big|_{x=x_0+c(t_0-t)} - \frac{c}{2}\left[u_t^2 + c^2 u_x^2\right]\Big|_{x=x_0-c(t_0-t)}$$

$$\Rightarrow e'(t) = -\left[-c^2 u_x u_t + \frac{c}{2}u_t^2 + \frac{c}{2}c^2 u_x^2\right]\Big|_{x=x_0+c(t_0-t)} - \left[c^2 u_x u_t + \frac{c}{2}u_t^2 + \frac{c}{2}c^2 u_x^2\right]\Big|_{x=x_0-c(t_0-t)}$$

$$= -\frac{c}{2}\left[(u_t - c u_x)^2\right]_{x=x_0+c(t_0-t)} - \frac{c}{2}\left[(u_t + c u_x)^2\right]\Big|_{x=x_0-c(t_0-t)} \le 0$$

Ε8: Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στράτης   19/3/2019

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, & x \in \mathbb{R}, t>0, \quad c>0 : \text{σταθερό} \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases} \Big\} x \in \mathbb{R}$$

Λύση d'Alembert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct)+g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy$$

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t), & x \in \mathbb{R}, t>0, \quad c>0 : \text{σταθερά} \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases} \Big\} x \in \mathbb{R}$$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct)+g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-ct}^{x+ct} F(y,s)\,dy\,ds$$

Τρόποι Εύρεσης της Λύσης

1 Αναγωγή σε πρόβλημα $1^{ης}$ Τάξης

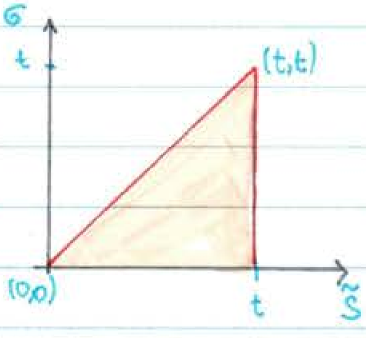
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}\right)\underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}\right)}_{v} = F(x,t)$$

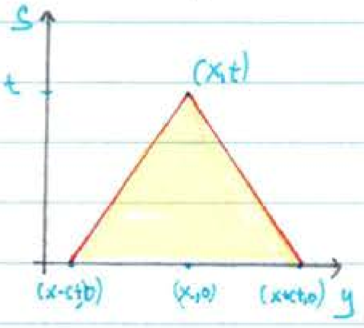
$$\left.\begin{aligned} & v_t + c v_x = F(x,t) \\ & v(x,0) = u_t - c u_x(x,0) = h(x) - c g'(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow v(x,t) = h(x-ct) - c g'(x-ct) + \int_0^t F(x+cs-ct, s)\,ds$$

$$\begin{cases} u_t - c u_x = v(x,t) \\ u_t(x,0) = g(x) \end{cases} \Rightarrow u(x,t) = g(x,ct) + \int_0^t \left\{h(x+ct-2c\tilde{s}) - c g'(x+ct-2\tilde{s})\right\} d\tilde{s} + \int_0^t \left\{\int_0^{\tilde{s}} F(c\sigma - 2c\tilde{s} + x + ct, \sigma)\,d\sigma\right\} d\tilde{s}$$

Αλλαγή μεταβλητής : $y = -2c\tilde{s} + x + ct$

- $\int_0^t h(x+ct-2c\tilde{s})\,d\tilde{s} = \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy$
- $-c\int_0^t g'(x+ct-2\tilde{s})\,d\tilde{s} = -\frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} g'(y)\,dy = \frac{1}{2}\left[g(x-ct) - g(x+ct)\right]$





$$\begin{cases} y = c\sigma - 2c\tilde{s} + x + ct \\ s = \sigma \end{cases} \qquad J = \left| \det \begin{pmatrix} \sigma_y & \sigma_s \\ \tilde{s}_y & s_s \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2c} \neq 0$$

$$\begin{cases} \tilde{s} = \frac{1}{2}\sigma - \frac{1}{2c} y + \frac{1}{2c}(x+ct) \\ \sigma = s \end{cases}$$

$$\int_0^t \left\{ \int_0^{\tilde{s}} F(c\sigma - 2c\tilde{s} + x + ct, \sigma)\, d\sigma \right\} ds = \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} F(y,s)\, J \cdot dy\, ds$$

$$= \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-ct}^{x+ct} F(y,s)\, dy\, ds$$