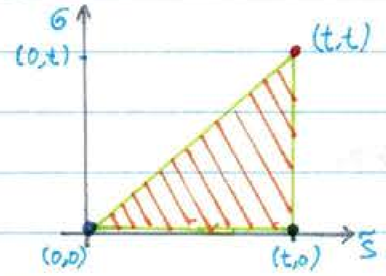
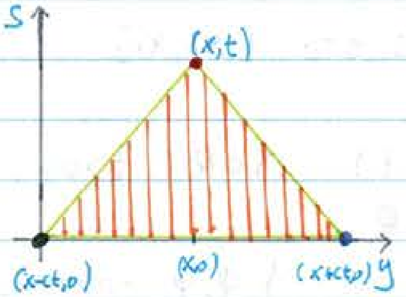
Μάθημα 6ο Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Στράτης 26/3/2019

$$\int_0^t \left\{ \int_0^{\tilde{s}} f(\sigma - 2c\tilde{s} + x + ct, \sigma)\, d\sigma \right\} d\tilde{s} = \int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f(y,s)\cdot J\, dy\, ds, \quad J = \dots = 1/2c$$

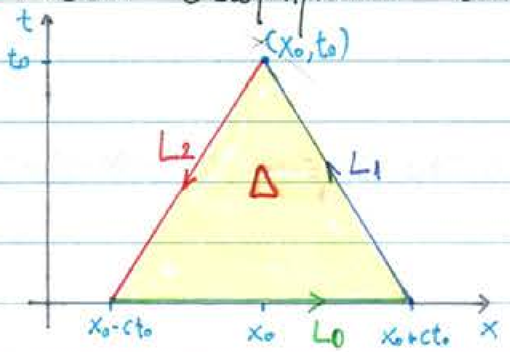
προκύπτει με αλλαγή μεταβλητής την ακόλουθη

$$\begin{cases} y = c\sigma - 2c\tilde{S}x + ct \\ s = \sigma \end{cases}$$





2 Μέσω Θεωρήματος Green.



$$\partial\Delta = L_0 + L_1 + L_2$$

Θεώρημα Green

$$\boxed{\iint_\Delta \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial t}\right) dx\,dt = \int_{\partial\Delta} (P\,dt + Q\,dx)}$$

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t)$, ολοκληρώνω στο Δ

$\iint_\Delta (u_{tt} - c^2 u_{xx})\, dx\,dt = \iint_\Delta f(x,t)\, dx\,dt$ παίρνουμε $P = c^2 u_x$, $Q = u_t$

$$\iint_\Delta (c^2 u_x)_x - (u_t)_t = \int_{\partial\Delta} (c^2 u_x\, dx + u_t\, dt) = \int_{L_0} + \int_{L_1} + \int_{L_2}$$

- $\int_{L_0} (c^2 u_x\, dt + u_t\, dx) = \int_{x_0 - ct_0}^{x_0 + ct_0} u_t(x,0) dx = \int_{x - ct_0}^{x + ct_0} h(x)\, dx$
- $\int_{L_1} (c^2 u_x dt + u_t dx) \overset{\frac{dx}{dt} = -c}{=\!=} -c \int_{L_1} u_x dx + u_t dt = -c\,[u(x_0,t_0) - u(x_0 + ct_0, 0)] = c\,[g(x_0 + ct_0) - u(x_0,t_0)]$
- $\int_{L_2} (c^2 u_x dt + u_t dx) \overset{\text{ανάλογα}}{=} \dots = c\,[g(x_0 - ct_0) + u(x_0,t_0)]$

Άρα $\iint_\Delta f(x,t)\, dx\,dt = 2 \cdot c \cdot u(x_0,t_0) - c\,[g(x_0 + ct_0) + g(x_0 - ct_0)] - \int_{x - ct_0}^{x + ct_0} h(x)\, dx.$

③ Με τον κανόνα του Leibniz

Τύπος του Leibniz: $\frac{d}{dx}\int_{\alpha(x)}^{b(x)} g(x,t)\,dt = \int_{\alpha(x)}^{b(x)} \frac{\partial g(x,t)dt}{\partial x} + g(x,b(x))b'(x) - g(x,\alpha(x))\alpha'(x)$

$g, \frac{\partial g}{\partial x}$ συνεχείς σε μια περιοχή του (x,t)-επιπέδου που περιέχει τα $\alpha(x)\le t\le b(x)$, $x_0 \le x \le x_1$ και α, α', b, b' συνεχείς στο $[x_0, x_1]$

① $\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) & , x\in\mathbb{R}, t>0, c>0: \text{σταθερό} \\ u(x,0) = \phi(x) & \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \end{cases}$ $x\in\mathbb{R}$

f, ϕ, ψ επαρκώς ομαλές

Θεωρώ τα προβλήματα:

② $\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 \\ v(x,0) = \phi(x) \\ v_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$ ③ $\begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = f(x,t) \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = 0 \end{cases}$

Λόγω γραμμικότητας αν λύσω τα 2 και 3, η λύση του 1 είναι το άθροισμά τους.
Την λύση του 2 την ξέρω

$v(x,t) = \frac{1}{2}[\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\,ds$

Παίρνω το ④ $\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 \\ v(x,\tau) = \phi(x) \\ v_t(x,\tau) = \psi(x) \end{cases}$

Την λύση του ④ μπορώ να τη βρω

$v(x,t;\tau) = \frac{1}{2}[\phi(x+c(t-\tau)) + \phi(x-c(t-\tau))] + \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}\psi(s)\,ds$

[αν πάρω $\eta := t-\tau$ → καταλήγω στο ②]

Παίρνω τώρα το ⑤ $\begin{cases} r_{tt} - c^2 r_{xx} = 0 \\ r(x,\tau;\tau) = 0 \\ r_t(x,\tau;\tau) = f(x,\tau) \end{cases}$ ($r(x,t,\tau)$: λύση)

Η $w(x,t) = \int_0^t r(x,t;\tau)\,d\tau$ είναι η λύση του ③

$w_t = \overbrace{r(x,t,t)}^{\overset{⑤}{=}0} + \int_0^t r_t(x,t;\tau)\,d\tau$, $w_{tt} = \int_0^t r_{tt}(x,t;\tau)\,d\tau + \overbrace{r_t(x,t;t)}^{\overset{⑤}{=}f(x,t)}$

$w_{xx} = \int_0^t r_{xx}(x,t;\tau)\,d\tau \overset{⑤}{=} \frac{1}{c^2}\int_0^t r_{tt}(x,t;\tau)\,d\tau$

έτσι παίρνω το ③

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στρατής   26/3/2019

Η $r(x,t;\tau) = \frac{1}{2c}\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(\sigma,\tau)\,d\sigma$ (από το ③ για $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=f(x,\tau)$)

④ Αρχή του Duhamel

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) & x\in\mathbb{R},\ t>0,\ c>0 : \sigma\tau\alpha\theta \\ u(x,0) = \varphi(x) & x\in\mathbb{R} \quad , \quad f,\varphi,\psi \text{ επαρκώς ομαλές} \\ u_t(x,0) = \psi(x) & \end{cases}$$

Από Σ.Δ.Ε 1ης Τάξης

$$\begin{cases} u'(t) + \alpha\, u(t) = f(t) \\ u(0) = \varphi \end{cases} \longrightarrow u(t) = \varphi\cdot e^{-\alpha t} + \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} f(s)\,ds$$

Ορίζω $S(t)\varphi := e^{-\alpha t}\varphi$ "Επιλύων τελεστής"

Η $u_0(t) = S(t)\varphi$ είναι η λύση του αντίστοιχου ομογενούς π.α.τ

ολ $\begin{cases} u' + \alpha\cdot u = 0 \\ u(0) = \varphi \end{cases}$

τότε η λύση του μη ομογενούς μπορεί να γραφεί

$u(t) = S(t)\varphi + \int_0^t S(t-s) f(s)\,ds$

Από ΣΔΕ 2ης Τάξης

$$\begin{cases} u''(t) + \alpha^2 u(t) = f(t) & \alpha\neq 0 \\ u(0) = \varphi \\ u'(0) = \psi \end{cases}$$

ορίζω $v := \frac{1}{\alpha}u'$ τότε $v' = \frac{1}{\alpha}u'' = \frac{1}{\alpha}f(t) - \alpha u$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha}f \end{pmatrix}$$

$U := \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $F := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\alpha}f \end{pmatrix}$, $A := \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{pmatrix}$

$U' + AU = F$

$$U(0) = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0) \\ \frac{1}{\alpha} u'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \frac{1}{\alpha}\psi \end{pmatrix} =: \Phi$$

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

$$U(t) = e^{-At}\Phi + \int_0^t e^{-A(t-s)} F(s)\, ds$$

$$S(t)v := e^{At} v$$

$$U(t) = S(t)\Phi + \int_0^t S(t-s)F(s)\, ds$$

$$U_0(t) = S(t)\Phi$$

όταν $A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow e^{At} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha t) & -\sin(\alpha t) \\ \sin(\alpha t) & \cos(\alpha t) \end{pmatrix}$

Κάνοντας τις πράξεις μόνο στην 1η συντεταγμένη

$$u(t) = \varphi \cdot \cos(\alpha t) + \frac{1}{\alpha}\psi \cdot \sin(\alpha t) + \frac{1}{\alpha}\int_0^t \sin(\alpha(t-s)) f(s)\, ds$$