Μάθημα 7ο   Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στράτης   2/4/2019

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases}$$

ορίζω $v := u_t$ έτσι έχουμε

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2\partial_{xx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$$

Θέτω $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2\partial_{xx} & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}$, $\Phi = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$

Άρα θα έχω

$$(\text{μομ})\begin{cases} U_t + AU = F \\ U(x,0) = \Phi(x) \end{cases} \qquad (\text{ομ})\begin{cases} U_t + AU = 0 \\ U(x,0) = \Phi(x) \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases}$$

d'Alambert

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+ct) + g(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)\,ds$$

$$\to U_0 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[g(x+ct)+g(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)\,ds \\ \frac{c}{2}[g'(x+ct)+g'(x-ct)] + \frac{1}{2}[h(x+ct)+h(x-ct)] \end{bmatrix} = (*)$$

Ορίζω τον επιλύων τελεστή

$S(t)\Phi = S(t)\begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix} = (*)$ Τότε $U_0 = S(t)\Phi$

$$U = S(t)\Phi + \int_0^t S(t-s)F(s)\,ds$$

(i) $U(x,0) = \underbrace{S(0)}_{I}\Phi + 0 = \Phi$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t S(t-s)F(x,s)\,ds\right) = \int_0^t \big(S(t-s)F(x,s)\big)_t\,ds + S(t-s)F(x,s)\Big|_{s=t}\frac{\partial t}{\partial t} - S(t-s)F(x,s)\Big|_{s=0}\frac{\partial 0}{\partial t}$$

$$= \int_0^t \big(S(t-s)F(x,s)\big)_t\,ds + \overbrace{S(0)}^{I}F(x,t)$$

$$U_t = \big(S(t)\Phi(x)\big)_t + \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_0^t S(t-s)F(x,s)\,ds\right) =$$

$$= \big(S(t)\Phi(x)\big)_t + \int_0^t \big(S(t-s)F(x-s)\big)_t\,ds + F(x,t) = -AS(t)\Phi(x) - \int_0^t AS(t-s)F(x,s)\,ds + F(x,t) =$$

$$= F - A\left(S(t)\Phi(x) + \int_0^t S(t-s)F(x,s)\,ds\right) = F - AU$$

$$\Rightarrow U_t + AU = F$$

Εξελικτικές Εξισώσεις

$U : \mathbb{R}^m \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$x \in \mathbb{R}^m$

$F : \mathbb{R}^m \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}^n$

A: $n \times n$ πίνακας μερικών διαφορικών τελεστών ανεξάρτητων του t

Έστω το "πρόβλημα"

$U_t + AU = F \qquad \Phi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

$U(x,0) = \Phi(x) \qquad \longrightarrow U$ η λύση του

το αντίστοιχο ομογενές

$U_t + AU = 0 \qquad \rightsquigarrow U_0$ η λύση του

$U(x,0) = \Phi(x)$

Ορίζοντας όπως στα προηγούμενα, τον επιλύων τελεστή $S(t)$, για το ομογενές πατ

τότε $U_0(x,t) = S(t)\Phi(x)$

Αρχή του Duhamel

$$U(x,t) = \underbrace{S(t)\Phi(x)}_{U_0(x,t)} + \int_0^t S(t-s)F(x,s)\,ds$$

Η σχέση ανάμεσα στον A και $S(t)$ δίνεται από τη Θεωρία Ημιομάδων Τελεστών.

Σχόλια

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in \mathbb{R},\ t>0 \quad (c>0 \text{ σταθερό}) \\ u(x,0) = g(x) & \\ u_t(x,0) = h(x) & \Big\} x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$u_{ομ}(x,t)$ η λύση.

$$\left.\begin{aligned} g &\in C^2(\mathbb{R}) \\ h &\in C^1(\mathbb{R}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u_{ομ} \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$$

Αν έχουμε το μη ομογενές

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases}$$

u η γενική λύση.

ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Στρατής 2/4/2019

Ξέρουμε $u(x,t) = u_{ομ}(x,t) + u_{εις}(x,t)$, όπου $u_{εις}(x,t)$ η λύση του

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \\ u(x,0) = 0 \\ u_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

Άρα η ομαλότητα της u εξαρτάται από την ομαλότητα της $u_{εις}$

Σχέση ομαλότητας μεταξύ u και f

Αναγκαία Συνθήκη: $u_{εις} \in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty)) \Rightarrow f \in C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$

Ικανή Συνθήκη: αν $f \in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty)) \Rightarrow u_{εις} \in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$

Άρα έχουμε "Απώλεια 2 τάξεων διαφορισιμότητας"

Παρατήρηση: Η αναγκαία είναι βέλτιστη.

Η ικανή όμως μπορεί να βελτιωθεί κατά πολύ 1 τάξη παραγωγισιμότητας, δηλαδή $f \in C^1(\mathbb{R}\times[0,\infty)) \Rightarrow u_{εις} \in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$

Άρα αν
$$\left.\begin{array}{l} f \in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty)) \\ g \in C^2(\mathbb{R}) \\ h \in C^1(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \longrightarrow u \in C^2(\mathbb{R}\times[0,\infty))$$

Παράδειγμα: (Άσκηση)

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = x+t \\ u(x,0) = x \\ u_t(x,0) = 1 \end{cases} \longrightarrow u(x,t) = \frac{1}{2}[g(x+t)+g(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} h(s)\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} f(y,s)\,dy\,ds$$

⋮ (πράξεις)

$$u(x,t) = x + t + \frac{1}{6}(t^2(t+3x))$$

Άσκηση (από Evans) Κανόνας του Stokes

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0) = 0 & u \text{ η λύση} \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases}$$

Ορίζουμε $v := u_t$ τότε

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ v(x,0) = h(x) \\ v_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

$u \in C^2_3(\mathbb{R}^n \times [0,\infty))$ ή αλλιώς $C^{2,3}$

2 φορές συνεχής ως προς τη πρώτη μεταβλητή και 3 φορές ως προς την δεύτερη

$u_{tt} - \Delta u = 0$: Παραγωγίζω ως προς t

$0 = u_{ttt} - (\Delta u)_t = v_{tt} - \Delta v$

$u_t = h \implies v = h$

$$v_t(x,0) = \lim_{t\to 0^+} v_t(x,t) = \lim_{t\to 0^+} u_{tt}(x,t) = \lim_{t\to 0} \Delta u(x,t) = \Delta u(x,0) = 0$$

Παρατήρηση

Συμβολίζουμε $u_{(h)}(x,t)$ τη λύση του

$$\begin{cases} (u_{(h)})_{tt} - \Delta u_{(h)} = 0 \\ u_{(h)}(x,0) = 0 \\ (u_{(h)})_t(x,0) = h(x) \end{cases}$$

Συμβολίζουμε με $u_{(g)}(x,t)$ τη λύση του

$$\begin{cases} (u_{(g)})_{tt} - \Delta u_{(g)} = 0 \\ u_{(g)}(x,0) = g(x) \\ (u_{(g)})_t(x,0) = 0 \end{cases}$$

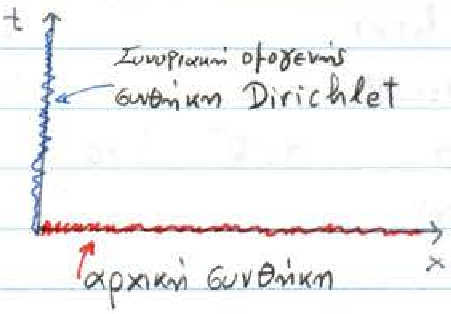
Συμβολίζω $u(x,t)$ τη λύση του

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases}$$

Τότε λόγω γραμμικότητας $u(x,t) = u_{(h)}(x,t) + u_{(g)}(x,t)$

Ασκήσεις

1. $$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & , x \in (0,\infty) , t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) & \\ u_t(x,0) = h(x) & \Big\} \; x \in [0,\infty) \\ u(0,t) = 0 & , t \in [0,\infty) \end{cases}$$

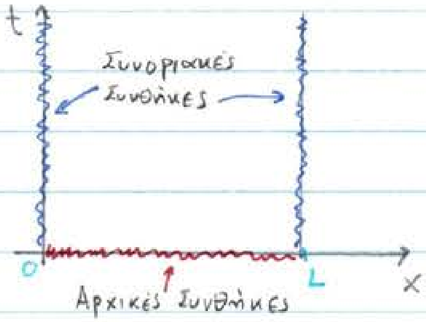


Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι 2/4/2019

(2)
$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x \in (0,\infty),\ t \in (0,\infty) \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \\ u_x(0,t) = 0 & t \geq 0 \quad (\text{ομογενής Neumann}) \end{cases}$$

Υπόδειξη:
$$u(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+ct)+g(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(s)\,ds, & x > ct \\ \frac{1}{2}[g(ct+x)+g(ct-x)] + \frac{1}{2c}\left[\int_0^{ct-x} h(s)\,ds + \int_0^{ct+x} \psi(s)\,ds\right], & 0 < x < ct \end{cases}$$

(3)
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t) \qquad x \in (0,L),\ t > 0$$
$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= h(x) \\ u_t(x,0) &= g(x) \end{aligned}\right\} x \in [0,L]$$
$$\left.\begin{aligned} u_x(0,t) - \alpha u_t(0,t) &= \phi(t) \\ u_x(L,t) + b u_t(L,t) &= \psi(t) \end{aligned}\right\} t \geq 0 \qquad \alpha > 0,\ b > 0 \text{ σταθερές}$$



Να δειχθεί ότι έχει το πολύ μια λύση
(θεωρώ 2 λύσεις ....)
Θα χρειαστεί να γράψω την ενέργεια.