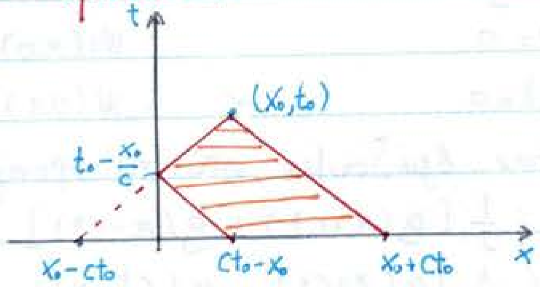
Μάθημα 8ο ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Στρατής 9/4/2019

Ανάκλαση Κυμάτων

1) Η ομογενής κυματική εξίσωση στην ημιευθεία

$$\text{ΠΑΣΤ}\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & x>0,\ t>0 \\ u(x,0) = g(x) & \\ u_t(x,0) = h(x) & \Big\} x \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & t \geq 0 \end{cases}$$



Η συνοριακή συνθήκη που επιβάλλει τι επέκταση θα κάνω στις g και h

$$g_n(x) = \begin{cases} g(x) & , x \geq 0 \\ -g(-x) & , x \leq 0 \end{cases} \qquad h_n(x) = \begin{cases} h(x) & , x \geq 0 \\ -h(-x) & , x \leq 0 \end{cases}$$

Θεωρούμε το ακόλουθο πρόβλημα

$$\text{ΠΑΤ}\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = 0 & , x \in \mathbb{R},\ t>0 \\ \tilde{u}(x,0) = g_n(x) & \\ \tilde{u}_t(x,0) = h_n(x) & \Big\}, x \geq 0 \end{cases}$$

και ορίζω $u(x,t) := \tilde{u}(x,t)$, $0 < x < \infty$

Παρατηρώ τα εξής:

Η u είναι λύση της $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

$u(x,0) = \tilde{u}(x,0) = g_n(x) = g(x) \quad x>0$

$u_t(x,0) = h(x) \quad , x>0$

Η u λύση του ΠΑΣΤ για $x>0$

(Την $\tilde{u}$ την ξέρω από d'Alambert)

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left[g_n(x+ct) + g_n(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h_n(y)\,dy$$

- $t>0$, $x>ct$: $g_n(x+ct) = g(x+ct)$, $g_n(x-ct) = g(x-ct)$, $h_n(y) = h(y), y>0$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) + g(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(y)\,dy$$

- $t>0$, $x<ct$: $g_n(x+ct) = g(x+ct)$, $g_n(x-ct) = -g(ct-x)$, $h_n(y) = -h(-y)$, $y<0$

$$u(x) = \frac{1}{2}\left[g_n(x+ct) + g_n(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h_n(y)\,dy = \frac{1}{2}\left[g(x+ct) - g(ct-x)\right] + \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} h(y)\,dy.$$

$$* \ \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h_n(y)\,dy = \frac{1}{2c}\int_{0}^{x+ct} h_n(y)\,dy + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0} h_n(y)\,dy = \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} h(y)\,dy - \frac{1}{2c}\int_0^{ct-x} h(y)\,dy = \frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct} h(y)\,dy.$$

$$u = v + w$$

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 \\ v(x,0) = g(x) \\ v_t(x,0) = 0 \\ v(0,t) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = 0 \\ w_t(x,0) = 0 \\ w(0,t) = \alpha(t) \end{cases}$$

Την v την βγάζουμε από το προηγούμενο

$$v(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[g(x+ct) + g(x-ct)] & , x > ct \\ \frac{1}{2}[g(x+ct) - g(ct-x)] & , x < ct \end{cases}$$

Την $w(x,t)$ την παίρνουμε από μέθοδο χαρακτηριστικών

$$w(x,t) = P(x+ct) + Q(x-ct)$$

$$\vdots$$

$$\begin{cases} P(x) = Q(x) = 0 & , x \geq 0 \\ Q(x) = \alpha(-\frac{x}{c}) & , x < 0 \end{cases} \longrightarrow w(x,t) = \begin{cases} 0 & , x > ct \\ \alpha(t - \frac{x}{c}) & , x < ct \end{cases}$$

2) Η μη ομογενής κυματική εξίσωση στην ημιευθεία

$$\text{ΠΑΣΤ} \begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) & , x > 0 \ , t > 0 \\ u(x,0) = g(x) \\ u_t(x,0) = h(x) \end{cases} x \geq 0 \\ u(0,t) = 0 & , t \geq 0 \end{cases}$$

Θεωρώ το

$$\text{ΠΑΤ} \begin{cases} \tilde{u}_{tt} - c^2 \tilde{u}_{xx} = f_n(x,t) & , x \in \mathbb{R} , t \geq 0 \\ \tilde{u}(x,0) = g_n(x) \\ \tilde{u}_t(x,0) = h_n(x) \end{cases}$$

περιττή επέκταση της $f(x,t)$ ως προς την $x=0$ $\forall t>0$

Ορίζω $u(x,t) := \tilde{u}(x,t)$ $x \geq 0$ $t > 0$

$$\tilde{u}(x,t) = \frac{1}{2}[g_n(x+ct) + g_n(x-ct)] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h_n(y)\,dy + \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-s)}^{x+c(t-s)} f_n(y,s)\,dy\,ds \quad (*)$$

Πρέπει $u(0,t) = 0$ $\forall t > 0$, αυτό προκύπτει αν $\tilde{u}(0,t) = 0$ $\forall t > 0$ αυτό θέλει η $\tilde{u}$: περιττή (αυτό το βλέπουμε εύκολα από τον τύπο (*))

Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι   Στρατής   9/4/2019

$$\frac{1}{2}\left[g(x_0+ct_0)+g(x_0-ct_0)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} h(y)\,dy+\frac{1}{2c}\int_0^{t_0}\int_{x_0-c(t_0-s)}^{x_0+c(t_0-s)} f(y,s)\,dy\,ds\,,\quad t_0>0,\ x_0>ct_0$$

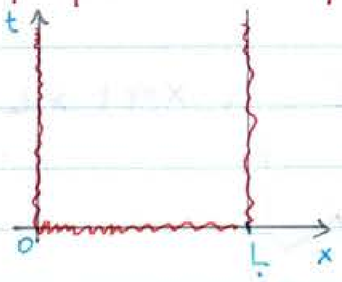
$$\frac{1}{2}\left[g(x_0+ct_0)-g(ct_0-x_0)\right]+\frac{1}{2c}\int_{ct_0-x}^{x+ct_0} h(y)\,dy+\frac{1}{2c}\int_0^{t_0}\int_{c(t_0-s)-x_0}^{x_0+c(t_0-s)} f(y,s)\,dy\,ds\,,\quad t_0>0,\ x_0<ct_0$$

Άσκηση: Να λύσω το ίδιο πρόβλημα με τη μέθοδο του επιλύων τελεστή

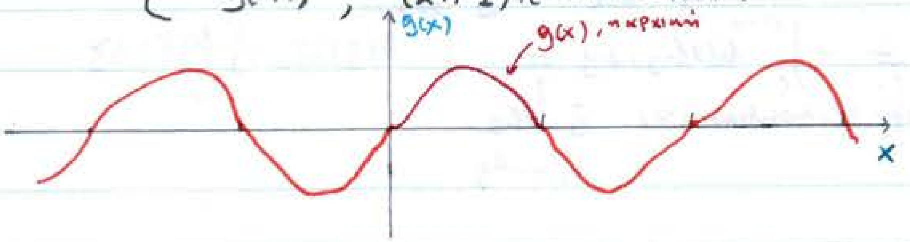
3 Η ομογενής κυματική εξίσωση σε πεπερασμένο διάστημα

ΠΑΣΤ

$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx}=0 & 0<x<L\,,\ t>0\\ u(x,0)=g(x) & \\ u_t(x,0)=h(x) & \\ u(0,t)=u(L,t)=0 & \end{cases}$$



$$g_{ext}(x)=\begin{cases} g(x)\,, & 2n\ell<x<(2n+1)\ell \\ -g(-x)\,, & (2n-1)\ell<x<2n\ell \end{cases}\qquad n\in\mathbb{Z}$$



αντίστοιχα η $h_{ext}(x)$

$$\tilde{u}_{tt}-c^2\tilde{u}_{xx}=0\,,\quad x\in\mathbb{R}\,,\ t>0$$

$$\left.\begin{array}{l}\tilde{u}(x,0)=g_{ext}(x)\\ \tilde{u}_t(x,0)=h_{ext}(x)\end{array}\right\}\ x\in\mathbb{R}$$

ορίζω $u(x,t):=\tilde{u}(x,t)\,,\ 0\le x\le \ell\,,\ t>0$

$x=0$ & $x=L$: περιττές επεκτάσεις

$\tilde{u}(0,t)=0=\tilde{u}(L,t)$

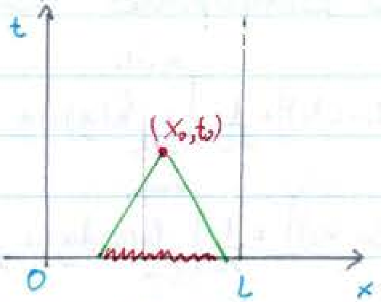
$$\tilde{u}(x,t)=\frac{1}{2}\left[g_{ext}(x+ct)+g_{ext}(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h_{ext}(y)\,dy$$

Παραδείγματα:

- $[x-ct, x+ct] \subseteq [0,L]$

  $\nexists$ ανακλάσεις

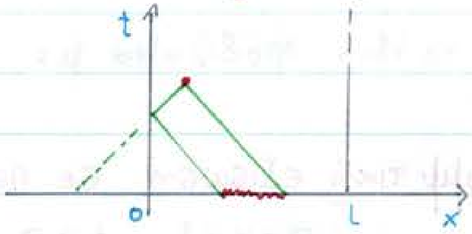
  δουλεύουμε όπως ξέραμε



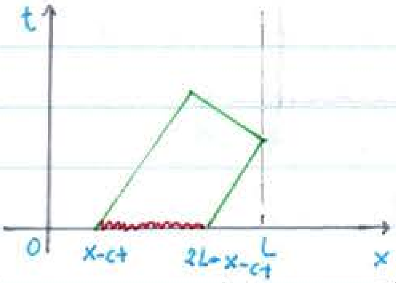
- $x-ct<0$, $0<x+ct-L$

  1 ανάκλαση

  το δείξαμε



- $0<x-ct<L$, $x+ct>L$



$\exists$ 1 ανάκλαση

$$g_{ext}(x-ct) = g(x-ct)$$

$$g_{ext}(x+ct) = -g(-(x+ct-\ell)+\ell) = -g(2\ell-x-ct)$$

$y-2\ell \rightarrow y$

$$\int_{x-ct}^{x+ct} h_{ext}(y)\,dy = \int_{x+ct}^{\ell} + \int_{\ell}^{ct+x} \underset{\uparrow}{=} -\int_{\ell}^{ct+x} h(2\ell-y)\,dy \underset{\uparrow}{=} \int_{\ell}^{2\ell-x-ct} h(\tilde{y})\,d\tilde{y} = -\int_{2\ell-x-ct}^{\ell} h(\tilde{y})\,d\tilde{y}$$

λόγω 2ℓ-περιοδικότητας

$\tilde{y} = 2\ell - y$

$d\tilde{y} = -dy$

- 2 ανακλάσεις