Μάθημα 11ο: Ε8. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις Ι Στρατής 14/5/2019

$n=3$ ΠΑΤ για την κυματική εξίσωση
$\bar{u}(x;r,t) = \fint_{\partial B(x,r)} u(y,t)\,ds(y)$

$V(x;r,t) := r\cdot\tilde{u}(x,r,t)$
$g(x,r) := r\,\tilde{\varphi}(x,r)$
$h(x,r) := r\,\tilde{\psi}(x,r)$

$\xrightarrow{\text{ΠΑΤ}} \begin{cases} V_{tt} - V_{rr} = 0, & r>0, t>0 \\ V(x,r,0) = g(x,r) & r>0 \\ V_t(x,r,0) = h(x,r) \\ V(x;0,t) = 0, & t>0 \end{cases}$

είναι μονοδιάστατο και μπορώ να χρησιμοποιήσω d'Alembert

έτσι έχω
$$V(x;r,t) = \frac{1}{2}\left[g(x;r+t) - g(x;t-r)\right] + \frac{1}{2}\int_{-r+t}^{r+t} h(x,y)\,dy$$

Η u του αρχικού προβλήματος είναι $u(x,t) = \lim_{r\to 0^+} \tilde{u}(x,r,t)$, άρα
$$u(x,t) = \lim_{r\to 0^+} \frac{V(x;r,t)}{r} = \lim_{r\to 0^+}\left\{\frac{1}{2r}\left[g(x;r+t) - g(x;t-r)\right] + \frac{1}{2r}\int_{t-r}^{r+t} h(x,y)\,dy\right\} =$$
$$= \frac{d}{dt} g(x,t) + h(x,t)$$

$g(x,t) = t\,\tilde{\varphi}(x,t) = t\fint_{\partial B(x,t)} \varphi(y)\,ds(y)$
$h(x,t) = t\,\tilde{\psi}(x,t) = t\fint_{\partial B(x,t)} \psi(y)\,ds(y)$

$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[t\fint_{\partial B(x,t)} \varphi(y)\,ds(y)\right] + t\fint_{\partial B(x,t)} \psi(y)\,ds(y)$$

Έστω φ ομαλή
$$\frac{\partial}{\partial t} g(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t\fint_{\partial B(x,t)} \varphi(y)\,ds(y)\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(t\fint_{\partial B(0,1)} \varphi(x+tz)\,ds(z)\right) =$$
$$= \fint_{\partial B(0,1)} \varphi(x+tz)\,ds(z) + t\fint_{\partial B(0,1)} \nabla\varphi(x+tz)\cdot z\,ds(z) = \fint_{\partial B(x,t)} \varphi(y)\,ds(y) + t\fint_{\partial B(x,t)} \nabla\varphi(y)\,\frac{y-x}{t}\,ds(y) =$$
$$= \fint_{\partial B(x,t)} \varphi(y)\,ds(y) + \fint_{\partial B(x,t)} \nabla\varphi(y)\,(y-x)\,ds(y)$$

αντιστοίχως
$h(x,t) = t\,\tilde{\psi}(x,t) = t\fint_{\partial B(x,t)} \psi(s)\,ds(y)$ άρα

$$u(x,t) = \fint_{\partial B(x,t)} \left\{\varphi(y) + \nabla\varphi(y)\cdot(y-x) + t\psi(y)\right\} ds(y)$$

Ξέρω ότι για $\mathbb{R}^3$: $\fint_{\partial B(x,t)} (\ldots) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(x,t)} (\ldots)$

Ο τελικός τύπος είναι: $\boxed{u(x,t) = \frac{1}{4\pi t^2}\int_{\partial B(x,t)} \left[\varphi(y) + \nabla\varphi(y)(y-x) + t\psi(y)\right] ds}$

Ονομάζεται τύπος του Kirchhoff

Αν πάρουμε την $W_{tt} - c^2 \Delta W = 0$, τότε ο τύπος θα γίνει:

$$W(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t^2} \int_{\partial B(x,t)} [\varphi(y) + \nabla\varphi(y)(y-x) + t\psi(y)]\, ds(y)$$

Οι συνθήκες ομαλότητας του αρχικού προβλήματος που μας επιτρέπουν να πάρουμε τον τύπο του Kirchhoff είναι

$\varphi \in C^3$, $\psi \in C^2 \implies u \in C^2$

- $n = 3$: Kirchhoff
- $n = 2$: Hadamard $\longrightarrow$ Από τις 3 χωρικές πάμε στις 2 χωρικές μέθοδος της καθόδου (descent)

ΠΑΤ $\quad (\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2})$

$$u_{tt} - \Delta u = 0 \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad t > 0$$

$$\left.\begin{aligned} u(x,0) &= \varphi(x) \\ u_t(x,0) &= \psi(x) \end{aligned}\right\} x \in \mathbb{R}^2 \qquad u(x_1, x_2, t) \text{ η λύση}$$

Ορίζω $\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t)$

$$\tilde{u}(x_1, x_2, x_3, 0) := u(x_1, x_2, 0) = \varphi(x_1, x_2)$$

$$\tilde{u}_t(x_1, x_2, x_3, 0) := u_t(x_1, x_2, 0) = \psi(x_1, x_2)$$

Η $\tilde{u}$ λύνει το

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} - \tilde{u}_{x_1x_1} - \tilde{u}_{x_2x_2} - \tilde{u}_{x_3x_3} = 0 \\ \tilde{u}(x_1, x_2, x_3, 0) = \tilde{\varphi}(x_1, x_2, x_3) := \varphi(x_1, x_2) \\ \tilde{u}_t(x_1, x_2, x_3, 0) = \tilde{\psi}(x_1, x_2, x_3) := \psi(x_1, x_2) \end{cases}$$

Τη λύση του οποίου τη ξέρω από τον τύπο του Kirchhoff $\implies$

$$\tilde{u}(x_1, x_2, 0, t) = ⨍_{\partial \bar{B}(\bar{x},t)} \{\tilde{\varphi}(y) + \nabla\tilde{\varphi}(y)(y-x) + t\tilde{\psi}(y)\}\, ds(y)$$

όπου $\bar{B}(\bar{x},t) = B((x_1, x_2, 0), t) \in \mathbb{R}^3 \ni \bar{x} = (x_1, x_2, 0)$

Θα δείξουμε πιο μετά πως προκύπτει

$$⨍_{\partial \bar{B}(\bar{x},t)} \tilde{\varphi}(y)\, ds(y) = \frac{1}{4\pi t^2} \int_{\partial \bar{B}(\bar{x},t)} \tilde{\varphi}(y)\, ds(y) = \frac{1}{2\pi t^2} \int_{B(x,t)} \varphi(y)\left(1 + |\nabla\gamma(y)|^2\right)^{1/2} dy = \frac{1}{2\pi t^2} \int_{B(x,t)} \frac{t\,\varphi(y)}{(t^2 - |x-y|^2)^{1/2}}\, dy$$

όπου $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}$, $B(x,t) \in \mathbb{R}$

$\gamma(y) := (t^2 - |y-x|^2)^{1/2}$, $y \in B(x,t)$ (γράφημα της σφαίρας)

$$\nabla\gamma(y) = -\frac{y-x}{(t^2 - |y-x|^2)^{1/2}} \implies (1 + |\nabla\gamma(y)|^2)^{1/2} = \left(\frac{t^2}{t^2 - |y-x|^2}\right)^{1/2}$$

ΕΒ. Μερικές Διαφορικές Εξισώσεις I

14/5/2019

Αντιστοίχως $\fint_{\partial B(\bar{x},t)} t\,\tilde{\psi}(y)\,dS(y) = \frac{1}{2\pi t^2}\int_{B(x,t)} \frac{t^2\psi(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy$

$$\fint_{\partial B(\bar{x},t)} \nabla\tilde{\varphi}(y)(y-x)\,dS(y) = \frac{1}{2\pi t^2}\int_{B(x,t)} \frac{t\,\nabla\varphi(y)(y-x)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy$$

Η λύση στη διάσταση $n=2$, δίνεται από τον τύπο του Poisson:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{2\pi t^2}\int_{B(x,t)} \frac{t\cdot\varphi(y)+t^2\psi(y)+t\,\nabla\varphi(y)(y-x)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy}$$

"χωρίς ομαλότητα" δίνεται από το

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[t^2\fint_{B(x,t)}\frac{\varphi(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}dy\right] + \frac{t^2}{2}\fint_{B(x,t)}\frac{\psi(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy.$$

Παρατηρήσεις: 1 Στον $n=3$ έχω τα ολοκληρώματα στην επιφάνεια της σφαίρας, ενώ για $n=2$ σε ολόκληρη τη σφαίρα

2 $n=1$: Δεν εμφανίζεται η παράγωγος της φ

$\left.\begin{array}{l} n=2 \\ n=3 \end{array}\right\}$ Εμφανίζεται η παράγωγος της φ.

Για $n\geq 2$ η λύση δεν έχει την ίδια ομαλότητα με τα δεδομένα. Το φαινόμενο στο οποίο η λύση έχει χαμηλότερη ομαλότητα από τα δεδομένα το λέμε "Εστίαση"

3 Για $n=1$ η "Ενεργειακή νόρμα" (L^2-νόρμα) της λύσης $u(x,t)$
$E(t) = \frac{1}{2}\int_U (u_t^2 + c^2|\nabla u|^2)\,dx$, $0\leq t\leq T$ διατηρείται σταθερή.
Το ίδιο και για $n\geq 2$. Η $u(x,t)$ λύνει το:

$$\begin{cases} u_{tt} - c\Delta u = f & , U_T := U\times(0,T) \\ u = g & , \Gamma_T = \bar{U}_T \setminus U_T \\ u_t = h & , U\times\{t=0\} \end{cases}$$

← ανοιχτό και φραγμένο στον $\mathbb{R}^n$ με ομαλό σύνορο

Θα δείξουμε τώρα : $\int_{\partial B(\bar{x},t)} \tilde{Q}(y)\,dS(y) = 2\int_{B(x,t)}\frac{t\,Q(y)}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy$

$x=(x_1,x_2)$, $\bar{x}=(x_1,x_2,x_3)$

$\tilde{Q}(y_1,y_2,y_3) = Q(y_1,y_2)$

$B(x,t)$ = δισκος στον $\mathbb{R}^2$ κέντρου x, ακτινας t
$\partial\bar{B}(x,t)$ = σφαίρα στον $\mathbb{R}^3$ κέντρου $\bar{x}$, ακτινας t (επιφάνεια μπάλας)

$|\bar{y}-\bar{x}|=t \longrightarrow y_3 - x_3 \pm (t^2-|y-x|^2)^{1/2} \Rightarrow$
$y_3 = x_3 \pm (t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2)^{1/2}$

$\partial\bar{B}_+(\bar{x},t) := \partial\bar{B}(\bar{x},t)\cap\{y_3\geq 0\}$: άνω ημισφαίριο
$\partial\bar{B}_-(\bar{x},t) := \partial\bar{B}(\bar{x},t)\cap\{y_3\leq 0\}$: κάτω ημισφαίριο
δουλεύω στο ένα από τα 2.

$$dS(y) = \left[\left(\frac{\partial y_3}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial y_3}{\partial y_2}\right)^2+\left(\frac{d y_3}{d y_3}\right)^2\right]^{1/2}\cdot \overbrace{dy_1 dy_2}^{dy} =$$
$$= 1+\left(\frac{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}{t^2-(y_1-x_1)^2-(y_2-x_2)^2}\right)^{1/2} dy = \frac{t}{(t^2-|y-x|^2)^{1/2}}\,dy$$