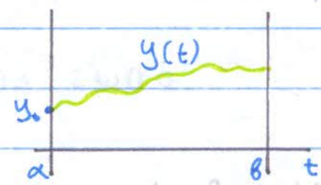
Μάθημα 1ο: Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 18/02/2019

Βιβλιογραφία: • Μεταπτυχιακές Σημειώσεις Αριθμητικής Ανάλυσης
- Αριθμητικές Μέθοδοι Σ.Δ.Ε  Παν. Εκδ. Κρήτης.

Ασκήσεις (Θεωρητικές) : 2 ή 3  20%
Υπολογιστικές ασκήσεις : 2 ή 3  30%  (Υποχρεωτικές)
Διαγώνισμα ( $\geq 4$ ) : 50%

Ζητώ $y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$  $\alpha \leq t \leq \beta$  $y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_m' \end{bmatrix}$ , $f = f(t,y) = \begin{bmatrix} f_1(t, y_1, \dots, y_m) \\ \vdots \\ f_m(t, y_1, \dots, y_m) \end{bmatrix}$

$y : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$




ΠΑΤ $\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)) & \alpha \leq t \leq \beta \\ y(\alpha) = y_0 \in \mathbb{R}^m \end{cases}$

Λύση $y(t)$ παραγωγίσιμη $t \in [\alpha, \beta]$ και πληροί το Π.Α.Τ.

Υπόθεση: $f$ συνεχής για $\alpha \leq t \leq \beta$ , $y \in \mathbb{R}^m$ $\left( \Longrightarrow y \in C^1([\alpha, \beta]) \right)$

Παράδειγμα: Πρόβλημα που δεν έχει λύση:

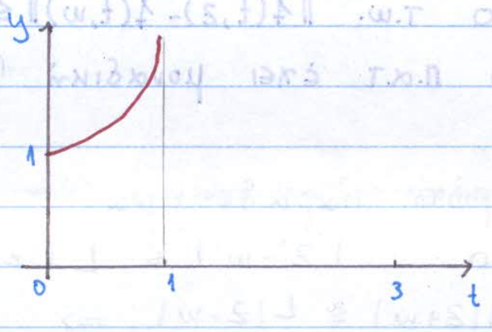
$m = 1$  $y' = y^2$ , $0 \leq t \leq 3$
$y(0) = 1$

$\int \frac{dy}{y^2} = \int dt$

$-\frac{1}{y} = t + c \Longrightarrow y(t) = -\frac{1}{t+c}$

$y(0) = 1 \Longrightarrow -\frac{1}{c} = 1 \Longrightarrow c = -1$

$y(t) = \frac{1}{1-t}$  $0 \leq t \leq \beta$
$\beta < 1$




Δεν έχει λύση σύμφωνα με τον ορισμό μας για το τι είναι λύση.
Έχουμε τοπική λύση.

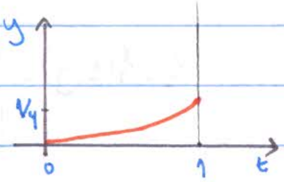
**Παράδειγμα:** $y' = |y|^{1/2}$, $0 \le t \le 1$, $y \ge 0$
$y(0) = 0$

$\Rightarrow$

$y' = y^{1/2}$, $0 \le t \le 1$
$y(0) = 0$

$\int \frac{dy}{y^{1/2}} = \int dt \longrightarrow 2\sqrt{y} = t + c \Rightarrow \sqrt{y} = (t+c)/2 \rightsquigarrow y = \frac{1}{4}(t+c)^2$

$y = \frac{t^2}{4}$




Και η $y=0$ είναι λύση όπως επίσης η $y(t) = \begin{cases} \frac{1}{4}(t-\alpha)^2 & t \ge \alpha \\ 0 & , 0 \le t < \alpha \end{cases}$

**Θεωρήματα Ύπαρξης - Μοναδικότητας του π.α.τ**

$y' = f(t,y)$ $\alpha \le t \le \beta$
$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^m$ $f \in C([\alpha,\beta] \times \mathbb{R}^m)$

**Θεώρημα 1:** Υποθέτουμε:
(i) $f \in C([\alpha,\beta] \times \mathbb{R}^m)$
(ii) Η $f$ πληροί ολική συνθήκη Lipschitz στο $[\alpha,\beta] \times \mathbb{R}^m$, δηλαδή
$\exists\, L \ge 0$ τ.ω. $\|f(t,z) - f(t,w)\| \le L\|z-w\|$ $\forall\, t \in [\alpha,\beta]$, $\forall\, z,w \in \mathbb{R}^m$
Τότε το π.α.τ έχει μοναδική λύση $y(t)$, $t \in [\alpha,\beta]$ $\forall\, y_0 \in \mathbb{R}^m$

Στο πρώτο παράδειγμα $f = y^2$
$\exists?\, L > 0$ $|z^2 - w^2| \le L|z-w|$ $\forall\, z,w \in \mathbb{R}$
$|z-w||z+w| \le L|z-w| \Rightarrow \exists\, L > 0 : |z+w| < L$ $\forall\, z,w \in \mathbb{R}$. άτοπο.
Στο δεύτερο παράδειγμα
$\exists\, L = ?$ $|z^{1/2} - w^{1/2}| \le L|z-w| \Leftrightarrow 1 \le L|z^{1/2} + w^{1/2}|$ $z,w \to 0$

Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά Ι 18/02/2019

Τοπικό Θεώρημα Υπαρξης-Μοναδικότητας

Θεωρούμε το σύνολο $S \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, $S=\{(t,y): |t-\alpha|\le A, \|y-y_0\|\le B\}$

και υποθέτουμε:

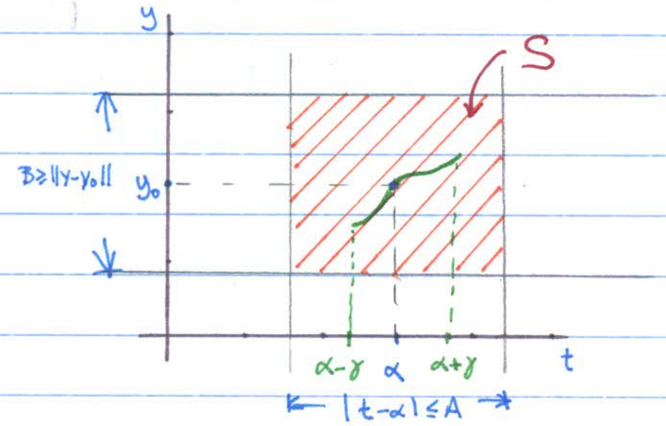
(i) $f \in C(S)$

(ii) $\exists\, L \geq 0$ τ.ω. $f$ πληροί τοπική συνθήκη Lipschitz με σταθερά $L$ ομοιόμορφα στο $t$ στο $S$ δηλαδή:

$\|f(t,z)-f(t,w)\| \le L\|z-w\|$ : $\forall t: |t-\alpha|\le A$, $\forall z,w \in \{y: \|y-y_0\|\le B\}$

Τότε $\exists$ μοναδική λύση $y$ του ΠΑΤ που ορίζεται για

$|t-\alpha| \le \gamma = \gamma(S) = \min\{A, B/M\}$, $M=\max_S \|f(t,y)\|$




$$\|f(t,w)-f(t,z)\| \le L\,\|z-w\| \qquad \forall t: |t-\alpha|\le A, \ \forall z,w \in \|y-y_0\|\le B$$

$1\le i\le m$

$$f_i(t,w)-f_i(t,z) = \nabla f_i(t,\xi_i)\cdot(w-z) \qquad f_i: S\to\mathbb{R}$$

$$\xi_i = \xi_i(t,i,w,z)$$

$$f_i(t,w)-f_i(t,z) = \sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t,\xi_i)(w_j-z_j)$$

$$|f_i(t,w)-f_i(t,z)| \le \sum_{j=1}^{m}\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t,\xi_i)\right||w_j-z_j|$$

$$\max_{\substack{(t,y)\in S\\ 1\le i,j\le m}}\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t,y)\right| = K<\infty \implies |f_i(t,w)-f_i(t,z)| \le K\sum_{j=1}^{m}|w_j-z_j| \implies$$

$$\max_{1\le i\le m}|f_i(t,w)-f_i(t,z)| \le K\sum_{j=1}^{m}|w_j-z_j| \iff \|f(t,w)-f(t,z)\|_\infty \le K\|w-z\|_1 \implies$$

$$\begin{cases} \exists\ C_1, C_2 > 0, \quad C_i = C(m) \\ C_2 \cdot \|x\| \le \|x\|_\infty \le C_1 \cdot \|x\| \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^m \qquad \text{άρα} \\ \exists\ D_1, D_2 > 0, : D_2 \|x\| \le \|x\|_1 \le D_1 \|x\| \quad \forall\ x \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \|f(t,w) - f(t,z)\| \le \frac{K\, D_1}{C_2} \|w, z\|$$