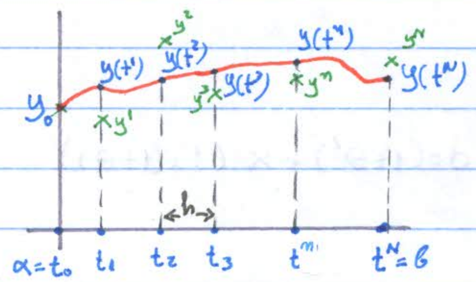
Μάθημα 2ο: Εφ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 19/2/2019

Το πρόβλημα αρχικών τιμών (π.α.τ) που θα μας απασχολήσει είναι το

$$y' = f(t,y) \quad , \quad \alpha \le t \le \beta$$
$$y(\alpha) = y_0$$
$$y, f \in \mathbb{R}^m$$

Θα υποθέσουμε ότι έχει μοναδική λύση και για ευκολία θα υποθέσουμε ότι η f πληροί ολική συνθήκη Lipschitz, δηλαδή
$\|f(t,z) - f(t,w)\| \le L \cdot \|z-w\| \quad \forall\, w,z \in \mathbb{R}^m, \ \forall\, t \in [\alpha, \beta]$



$h = \dfrac{\beta - \alpha}{N}$ ομοιόμορφο χρονικό βήμα

N ακέραιος ≥ 1

$t^n = \alpha + n \cdot h$

$y(t^n), n = 0,1,\dots,N$ Η τιμή της λύσης στο t^n, και ψάχνουμε τις προσεγγίσεις
$y(t^0) = y(\alpha) = y_0$ γνωστό

Τις προσεγγίσεις θα τις συμβολίζουμε με y^n
$y^n \cong y(t^n) \quad , \in \mathbb{R}^m$ (αριθμητική προσέγγιση)

Μέθοδος του Euler

$$y'(t) = f(t, y(t)) \longrightarrow y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$$

προσεγγίζουμε το αριστερό μέλος με το ακόλουθο πηλίκο διαφορών

$$\frac{y(t^{n+1}) - y(t^n)}{h} \simeq f(t^n, y(t^n)) \Rightarrow y(t^{n+1}) \cong y(t^n) - h \cdot f(t^n, y(t^n))$$

Μέθοδος Euler

ψάχνω $y^n, n = 0,1,\dots,N \quad y^n \in \mathbb{R}^m$
$y^0 = y_0$
Για $n = 0,1,\dots,N-1$
$$y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^n, y^n)$$

Τι μπορώ να πω για το $\| y^n - y(t^n) \|$: σφάλμα ;
μας ενδιαφέρει το $\max\limits_{0 \le n \le N} \| y^n - y(t^n) \| \le ?$

Για να εκτιμήσουμε το σφάλμα η ιδέα είναι ότι όσο μικρότερο το h, τόσο καλύτερο σφάλμα θα πετυχαίνουμε.

Λήμμα: Έστω ότι έχω τις ποσότητες $d_j \geq 0$ και σταθερές $\theta > 0$, $\kappa \geq 0$ και $d_{j+1} \le (1+\theta) \cdot d_j + \kappa$, $j = 0, 1, 2, \ldots$ τότε

$$d_n \le d_0 \cdot e^{n\theta} + \kappa \cdot \frac{e^{n\theta} - 1}{\theta}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Απόδειξη:

$d_1 \le d_0 (1+\theta) + \kappa$

$d_2 \le d_1 (1+\theta) + \kappa \iff d_2 \le d_0 (1+\theta^2) + \kappa (1+\theta) + \kappa = d_0 (1+\theta^2) + \kappa \left(1 + (1+\theta)\right)$

$d_3 \le d_0 (1+\theta)^3 + \kappa \left(1 + (1+\theta) + (1+\theta)^2\right)$

επαγωγικά

$$d_n \le d_0 (1+\theta)^n + \kappa \left[1 + (1+\theta) + (1+\theta)^2 + \ldots + (1+\theta)^{n-1}\right] = d_0 (1+\theta)^n + \kappa \frac{(1+\theta)^n - 1}{1+\theta-1}$$

$$d_n \le d_0 (1+\theta)^n + \kappa \frac{(1+\theta)^n - 1}{\theta}$$

Χρησιμοποιούμε το $1+\theta \le e^{\theta}$ και έτσι έχουμε

$$\boxed{d_n \le d_0 e^{n\theta} + \kappa \cdot \frac{e^{n\theta} - 1}{\theta} \quad \forall n}$$