Μάθημα 3ο — Εφ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ — 25/2/2019

Πρόταση (Σύγκλιση μεθόδου Euler)

Έστω $y \in C^2[\alpha,\beta]$ η λύση του ΠΑΤ και $M = \max_{\alpha \le t \le \beta} \|y''(t)\|$ τότε

$$\|y^n - y(t^n)\| \le \frac{C \cdot M}{2L}\left(e^{L(t^n-\alpha)} - 1\right) \cdot h \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

$C = C(m)$ προέρχεται από σταθερές σύγκρισης νορμών στο $\mathbb{R}^m$

Απόδειξη:

$y^{n+1} = y^n + h\, f(t^n, y^n) \qquad n = 0,1,\ldots$

$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\, f(t^n, y(t^n)) + \delta^n, \quad n = 0,1,\ldots \qquad \delta^n$ τοπικό σφάλμα

Αφαιρώ κατά μέλη $\qquad \delta^n = y(t^{n+1}) - [y(t^n) + h\, f(t^n, y(t^n))]$

$$y^{n+1} - y(t^{n+1}) = y^n - y(t^n) + h\,(f(t^n,y^n) - f(t^n,y(t^n))) - \delta^n$$

$$\|y^{n+1} - y(t^{n+1})\| \le \|y^n - y(t^n)\| + h\,\|f(t^n,y^n) - f(t^n,y(t^n))\| + \|\delta^n\|$$

ισχύει γιατί έχω ολική συνθήκη Lipschitz

$$\|y^{n+1} - y(t^{n+1})\| \le \|y^n - y(t^n)\| + h\,L\|y^n - y(t^n)\| + \|\delta^n\|$$

$$\underbrace{\|y^{n+1} - y(t^{n+1})\|}_{d^{n+1}} \le \underbrace{(1+hL)}_{(1+\theta)}\,\underbrace{\|y^n - y(t^n)\|}_{d^n} + \underbrace{\|\delta^n\|}_{k^n}$$

Αναπτύσω σε σειρά Taylor

$$\delta_i^n = y_i(t^n+h) - y_i(t^n) - h\,\overbrace{f_i(t^n, y(t^n))}^{y_i'(t^n)} \simeq y_i(t^n) + h y_i'(t^n) + \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_i^n) - y_i(t^n) - h y_i'(t^n)$$

$t^n \le \xi_i^n \le t^{n+1} \qquad 1 \le i \le m$

$$\delta_i^n = \frac{h^2}{2} y_i''(\xi_i^n) \qquad \|\delta^n\|_\infty = \max_{1\le i\le m} |\delta_i^n| = \frac{h^2}{2}\max_{1\le i\le m}|y_i''(\xi_i^n)|$$

$$C_1\|\delta^n\| \le \|\delta^n\|_\infty \le \frac{h^2}{2} C_2 M \quad \Leftarrow \quad C_1\|x\| \le \|x\|_\infty \le C_2\|x\|$$

$\|\delta^n\| \le \frac{h^2}{2}\frac{C_2}{C_1} M \qquad$ Παρατηρούμε ότι $\|\delta^n\| = O(h^2)$

$$\max_{0\le n\le N}\|\delta^n\| \le \frac{C \cdot M}{2} h^2 = K \qquad t^n = \alpha + nh \Rightarrow nh = t^n - \alpha$$

από το λήμμα $\|y^{n+1} - y(t^{n+1})\| = \frac{e^{nhL} - 1}{hL} \cdot \frac{C}{2} M h^2 = \frac{CM}{2}\,\frac{e^{(t^n-\alpha)L} - 1}{L}\, h \qquad n = 0,1,2,\ldots$

Παρατηρήσεις

1. Χρειαζόμαστε παραπάνω ομαλότητα της λύσης, και την ανάγουμε σε ιδιότητες της f που μπορούμε να ελέγξουμε.

$y' = f(t,y)$, $y'(t) = f(t,y(t))$

- Αν έχω μια διαφορική $m=1$

$$y''(t) = \frac{d}{dt}\left(f(t,y(t))\right) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,y(t)) + \frac{\partial f}{\partial y}(t,y(t))\frac{dy}{dt} = (f_t + f_y \cdot f)(t,y(t))$$

πότε $y'' \in C[a,b]$?

Αν f_t, f_y, f συνεχείς $\Rightarrow y'' \in C[a,b]$

- Αν είχα σύστημα εξισώσεων

$$\frac{dy}{dt} = f(t,y(t))$$

$$\frac{d^2 y_i}{dt^2} = y_i''(t) = \frac{d}{dt} f_i(t,y(t))$$

$$y_i''(t) = \frac{\partial f_i}{\partial t}(t,y(t)) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial y_j}(t,y(t)) \cdot f_j(t,y(t))$$

2. Τάξη ακρίβειας

σφάλμα $\varepsilon^n = y^n - y(t^n)$ $\max_{0\le n\le N} \|\varepsilon^n\| \le c\,h^1$

Η τάξη ακρίβειας της μεθόδου Euler είναι 1

Τάξη ακρίβειας p ο μέγιστος ακέραιος τέτοιος ώστε $\delta^n = O(h^{p+1})$

Θα θέλαμε υψηλότερη ακρίβεια. Μήπως μπορούσαμε να πετύχουμε καλύτερο?

Θεωρούμε $y' = 2t$ $0 \le t \le 1$ $y(0)=0$, $y(t) = t^2$

$\delta^n = h^2/2\, y''(\xi^n) \Rightarrow \delta^n = h^n$ $\varepsilon^n = y^n = y(t^n)$ $\rightsquigarrow$ $\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^n - h^2$

$\varepsilon^0 = 0$

$\varepsilon^1 = -h^2$

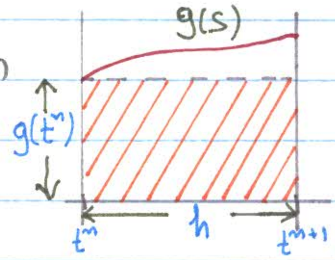
$\vdots$

$e^N = -Nh^2 = -N\cdot h \cdot h \overset{Nh=1}{\Longrightarrow} e^N = -h \Rightarrow |e^N| = h$

Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 25/2/2019

Μέθοδοι Runge-Kutta

$y'(t) = f(t, y(t))$, ολοκληρώνουμε κατά μέλη

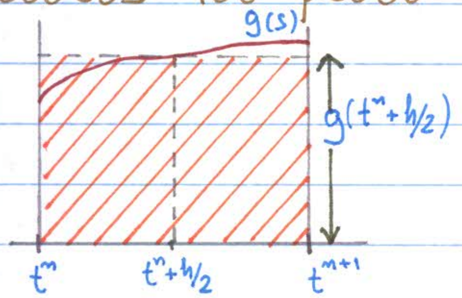


$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(s)ds = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s, y(s))ds$$

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underbrace{f(s,y(s))}_{g(s)}ds = \int_{t^n}^{t^{n+1}} g(s)ds \cong h\cdot g(t^n) = h\cdot f(t^n, y(t^n))$$

Την μέθοδο του Euler την παίρνω αν εφαρμόσω κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης πήραμε $y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\cdot f(t^n, y(t^n))$

Μέθοδος του μέσου



Υπολογίζω $\int_{t^n}^{t^{n+1}} g(s) \cong h\cdot g(t^n + h/2)$
από αυτό παίρνουμε

$$\boxed{\begin{aligned} y(t^{n+1}) &\cong y(t^n) + h\cdot f\left(t^n + \tfrac{h}{2}, y(t^n + \tfrac{h}{2})\right) \\ y(t^n + \tfrac{h}{2}) &\simeq y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^n, y(t^n)) \end{aligned}}$$