(1)

Μάθημα 4ο   Εφ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ   26/2/2019

Μέθοδοι Runge - Kutta

$$\begin{cases} y' = f(t,y) & , \alpha \le t \le b \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases}$$

ψάχνουμε προσεγγίσεις $y^n \cong y(t^n)$ $t^n = \alpha + n h$, $n=0,1,\dots N$, $N\cdot h = b-\alpha$

$$y^{n+1/2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^n, y^n)$$
$$y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^n + \frac{h}{2}, y^{n+1/2})$$

Μέθοδος "μέσου" ή "βελτιωμένη Euler"
Έχει τάξη ακρίβειας : $p = 2$

Τάξη ακρίβειας p

$\mathcal{E}^n = y^n - y(t^n)$
$\max_{0 \le n \le N} \|\mathcal{E}^n\| \le C \cdot h^p$ — Μέγιστο δυνατό για ΠΑΤ με ομαλή λύση

Άμεσες Μέθοδοι Runge-Kutta με q ενδιάμεσα στάδια

Butcher Ταμπλό $q \times q$

$$\begin{array}{ccccc|c} 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0=\tau_1 \\ \alpha_{21} & 0 & \cdot & \cdot & 0 & \tau_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & 0 & \dots & 0 & \tau_3 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{q1} & \alpha_{q2} & \dots & \alpha_{q,q-1} & 0 & \tau_q \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & & b_q & \end{array}$$

Το τ_i είναι είναι το άθροισμα της i-γραμμής
Το $\sum_{i=1}^{q} b_i = 1$
Στις άμεσες μεθόδους Runge-Kutta ο $q\times q$ πίνακας είναι κάτω τριγωνικός με τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι μηδέν.

Δίνονται τα α_{ij}, τ_i, b_i $y^{n,i}$, $1 \le i \le q$

Θέλουμε από το $y^n \xrightarrow{q\text{-ενδιάμεσα στάδια}} y^{n+1}$

Η μέθοδος που προκύπτει είναι η ακόλουθη:

$$y^{n,1} = y^n \quad , t^{n,1} = t^n$$
$$y^{n,2} = y^n + h\cdot \alpha_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \quad , t^{n,2} = t^n + \tau_2 \cdot h$$
$$y^{n,3} = y^n + h\cdot \alpha_{31} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + h\, \alpha_{32} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \quad , t^{n,3} = t^n + \tau_3 \cdot h$$
$$\vdots$$
$$y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad , t^{n,i} = t^n + \tau_i \cdot h$$
$$y^{n+1} = y^n + h\cdot \sum_{j=1}^{q} b_j \cdot f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

1

Παραδείγματα

• $q=1$

0	0
	1

(Euler)

Τάξη ακρίβειας $p=1$

$y^{n,1} = y^n \qquad t^{n,1} = t^n$

$y^{n+1} = y^n + h\cdot 1 \cdot f(t^{n,1}, y^{n,1})$

→ Η μέθοδος του Euler γραμμένη με τον συμβολισμό που εισάγαμε.

• $q=2$

0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
0	1	

Μέθοδος Μέσου

Τάξη ακρίβειας $p=2$

$y^{n,1} = y^n \quad , t^{n,1} = t^n$

$y^{n,2} = y^n + \frac{1}{2} h f(t^{n,1}, y^{n,1}) \quad , t^{n,2} = t^n + h/2$

$y^{n+1} = y^n + h \cdot \underbrace{1}_{b_2} \cdot f(t^{n,2}, y^{n,2})$

• $q=4$ "Κλασσική μέθοδος" Runge-Kutta Τάξη ακρίβειας $p=4$

0	0	0	0	0
1/2	0	0	0	1/2
0	1/2	0	0	1/2
0	0	1	0	1
1/6	1/3	1/3	1/6	

$y^{n,1} = y^n \quad , t^{n,1} = t^n$

$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \quad , t^{n,1} = t^n + \frac{h}{2}$

$y^{n,3} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \quad , t^{n,2} = t^n + h/2$

$y^{n,4} = y^n + h f(t^{n,3}, y^{n,3}) \quad , t^{n,3} = t^n + h$

$$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{6} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \frac{h}{3} f(t^{n,2}, y^{n,2}) + \frac{h}{3} f(t^{n,3}, y^{n,3}) + \frac{h}{6} f(t^{n,4}, y^{n,4})$$

Πεπλεγμένες (Γενικές Μέθοδοι) Runge-Kutta με q ενδιάμεσα στάδια

$q=2$

α_{11}	α_{12}	τ_1
α_{21}	α_{22}	τ_2
b_1	b_2	

$y^{n,1} = y^n + h\alpha_{11} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + h\,\alpha_{12} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \quad , t^{n,1} = t^n + \tau_1 h$

$y^{n,2} = y^n + h\cdot\alpha_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1}) + h\cdot\alpha_{22} f(t^{n,2}, y^{n,2}) \quad , t^{n,2} = t^n + \tau_2 \cdot h$

$$y^{n+1} = y^n + h\cdot b_1 f(t^{n,1}, y^{n,1}) + h\, b_2 f(t^{n,2}, y^{n,2})$$

Γενικά $q \times q$

α_{ij}	τ
b	

$y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad , t^{n,i} = t^n + \tau_i h \qquad 1 \le i \le q$

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

Εφ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 26/2/2019

Στην περίπτωση των πεπλεγμένων μεθόδων RK πρέπει να λύσω μη γραμμικό σύστημα

Θα πρέπει να δείξω ότι έχουν μοναδική λύση

(Θα αποδείξουμε αργότερα ότι έχει πάντα μοναδική λύση h αρκετά μικρό)

Τοπικό σφάλμα

Έστω η μέθοδος RK

$$y^{n,i} = y^n + \dots y^{n,j}$$

$$y^{n+1} = y^n + h\sum b_j f(y^{n,j})$$

Το τοπικό σφάλμα δ^n ορίζεται τότε με βάση τη μέθοδο RK

Ορίζω τις ενδιάμεσες ποσότητες ζ

$$(\zeta^{n,i}) = y(t^n) + \dots (\zeta^{n,j}) \qquad t^{n,i} = t^n + c_i h$$

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - \left[y(t^n) + h\cdot\sum_{j=1}^{q} b_j \cdot f(t^{n,j}, \zeta^{n,j})\right]$$

Η μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας p, αν το p είναι ο μέγιστος ακέραιος τέτοιος ώστε για όλα τα ΠΑΤ με ομαλές λύσεις

$$\|\delta^n\| = O(h^{p+1})$$

$$\Big\Downarrow \text{Θεώρημα (RK)}$$

$$\max_{0\le n\le N} \|\varepsilon^n\| \le C\cdot h^p \qquad \varepsilon^n = y^n - y(t^n) \qquad \text{"Χοντρικά"} \ \|\varepsilon^n\| \approx \|\delta^n\|/h$$

Τάξη ακρίβειας για τη μέθοδο του μέσου

0	0	0
1/2	0	1/2
0	1	

$$y^{n,1} = y^n \qquad t^{n,1} = t^n$$

$$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \qquad t^{n,2} = t^n + \frac{h}{2}$$

$$y^{n+1} = y^n + h\cdot f(t^{n,2}, y^{n,2})$$

Θα δείξουμε για $m=1$

$$\zeta^{n,1} = y(t^n) \qquad t^{n,1} = t^n$$

$$\zeta^{n,2} = y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, \zeta^{n,1}) \qquad t^{n,2} = t^n + \frac{h}{2}$$

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - \left[y(t^n) + h\cdot f(t^{n,2}, \zeta^{n,2})\right]$$

κάνω Taylor

$$y(t^{n+1}) = y(t^n+h) = y(t^n) + h\cdot y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3)$$

υποθέτω f ομαλή και κάνω Taylor για 2 μεταβλητές

$$f(t+\alpha, y+\beta) = f(t,y) + \alpha f_t(t,y) + \beta f_y(t,y) + \frac{1}{2!}\left[\alpha^2 f_{tt}(t,y) + 2\alpha\beta f_{ty}(t,y) + \beta^2 f_{yy}(t,y)\right] + O(\alpha^3,\beta^3)$$

$$f(t^{n,2}, y^{n,2}) = f(t^n + \overbrace{\frac{h}{2}}^{\alpha}, \overbrace{y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^n, y(t^n))}^{\beta})$$

$$\delta^n = y(t^n) + h\cdot y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3) - \left[y(t^n) + h\left(f(t^n, y(t^n)) + \overbrace{\frac{h}{2} f_t(t^n, y(t^n))}^{\alpha\cdot f_t} + \overbrace{\frac{h}{2} f(t^n, y(t^n))\cdot f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^2)}^{\beta\cdot f_y}\right)\right]$$

$y'(t^n) = f(t^n, y(t^n))$

$\Longrightarrow$

$$\delta^n = \frac{h^2}{2} y''(t^n) + O(h^3) - \frac{h^2}{2} f_t(t^n, y(t^n)) - \frac{h^2}{2} f(t^n, y(t^n)) f_y(t^n, y(t^n)) + O(h^3)$$

$$y' = f(t,y)$$

$$y'' = \frac{d}{dt}(f(t,y)) = f_t(t,y) + f_y(t,y)\frac{dy}{dt} = f_t(t,y) + f_y(t,y) f(t,y)$$

Αν κάνω την αντικατάσταση θα μείνει $\delta^n = O(h^3)$

Μήπως φεύγει και το h^3 και μένει κάτι καλύτερο?? ΟΧΙ

$$y(t^{n+1}) \longrightarrow \frac{h^3}{6} y'''(t^n) \qquad f \longrightarrow \frac{h}{2}\left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot f_{tt} + \dots$$

Το βλέπουμε αν πάρουμε ένα παράδειγμα

$$y' = \frac{t^2}{2} \longrightarrow y'' = t \longrightarrow y''' = 1$$

$$f = \frac{t^2}{2} \longrightarrow f_t = t \longrightarrow f_{tt} = 1$$

$$\longrightarrow f_y = 0 \longrightarrow f_{ty} = 0$$

Και παρατηρώ ότι δεν "εξουδετερώνει" το ένα το άλλο.

Τρόπος: Παίρνω y τ.ω. $y^{(m)} = 1$ και $f(t,y) = g(t)$ για να δείξω αυτό που θέλω.

Εξ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 26/2/2019

Αν έχω μια RK με $\delta^n = O(h^{p+1}) \xrightarrow{\text{περιμένω}} \max \|\varepsilon^n\| \le C h^p$

Αν έχω μεταβλητό βήμα? $\delta^n = O(h_n^{p+1} \cdot y^{(p+1)}(\xi_n))$

?? → μπορεί να είναι μεγάλο

Δεν θα πάμε να "βρούμε" το δ^n αλλά θα πάμε να το εκτιμήσουμε.

Έστω έχω μια άμεση RK με τάξη p

$y^{n+1} = y^n + h_n \Phi(t^n, y^n, h_n)$ $\qquad t^n \xrightarrow{+h_n} t^{n+1}$

$$O(h^{p+1}) \overset{\text{ξέρω}}{=} \delta^n = y(t^{n+1}) - [y(t^n) + h_n \cdot \Phi(t^n, y(t^n), h_n)]$$

Πως θα το εκτιμήσω?

Παίρνω άλλη μια RK τάξης $r > p$ (συνοδός μέθοδος)

$\tilde{y}^{n+1} = y^n + h_n \tilde{\Phi}(t^n, y^n, h_n)$

$$O(h^{r+1}) = \tilde{\delta}^n = y(t^{n+1}) - [y(t^n) + h_n \tilde{\Phi}(t^n, y(t^n), h_n)]$$

(λύνω ως προς $y(t^{n+1})$ και το αντικαθιστώ στο δ^n)

$$\underbrace{\delta^n}_{O(h^{p+1})} = \underbrace{\tilde{\delta}^n}_{O(h^{r+1})} + [y(t^n) + h_n \tilde{\Phi}(t^n, y(t^n), h_n)] - [y(t^n) + h_n \Phi(t^n, y(t^n), h_n)]$$

αφού $r > p$ μπορώ να "πετάξω" το $O(h^{r+1})$

Θεωρούμε ότι το y^n είναι καλή προσέγγιση

$$\delta^n \cong [\dots] - [\dots] \cong [y^n + h_n \cdot \tilde{\Phi}(t^n, y^n, h_n)] - [y^n + h_n \cdot \Phi(t^n, y^n, h_n)] = \tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}$$

Η εκτίμηση που θέλουμε →

$|\delta^n| = |\tilde{y}^{n+1} - y^{n+1}|$ $\qquad \dfrac{|\delta^n|}{h_n} \le Tol$