Μάθημα 5ο   Εφ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ   26/3/2019

Tableau Butcher

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1q} & c_1 \\ & & & c_2 \\ \vdots & a_{ij} & \vdots & \vdots \\ a_{q1} & \dots & a_{qq} & c_q \\ \hline b_1 & b_2 \dots & b_q & \end{array}$$

$y' = f(t,y)$, $\alpha \le t \le \beta$

$y(\alpha) = y^0$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$

$h = (\beta - \alpha)/N$ $t^n = \alpha + nh$ $t^0 = \alpha, \dots, t^N = \beta$

ψάχνουμε $y^n \cong y(t^n)$ $n = 0, 1, \dots, N$

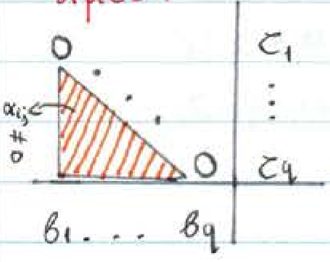
$y^n \xrightarrow[1 \le i \le q]{y^{n,i}} y^{n+1}$ χρειάζεται να κατασκευάσουμε ενδιάμεσες προσεγγίσεις

αυτά υπολογίζονται
$$y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,i}, y^{n,i}) \qquad 1 \le i \le q$$
$$t^{n,i} = t^n + c_i h \qquad 1 \le i \le q$$
$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

$y^{n,i}$: ενδιάμεσα στάδια q = αριθμός σταδίων

Αν $a_{ij} \neq 0$ για κάποιο $j \ge i$ τότε η μέθοδος λέγεται πεπλεγμένη
Αν $a_{ij} = 0$ $\forall i,j$ $j \ge i$ τότε έχω άμεση μέθοδο

άμεση



$$y^{n,1} = y^n$$
$$y^{n,2} = y^n + h a_{21} f(t^{n,1}, y^{n,1})$$
$$\vdots$$
$$y^{n,q} = y^n + h \sum_{j=1}^{q-1} a_{qj} f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

Παραδείγματα μη πεπλεγμένων μεθόδων RK

1) $q = 1$ $\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & \end{array}$ πεπλεγμένη Euler

$$y^{n,1} = y^n + h \cdot f(t^{n,1}, y^{n,1})$$
$$t^{n,1} = t^n + h$$
$$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n,1}, y^{n,1})$$

Συνήθως την γράφουμε
$y^{n+1} = y^n + h \cdot f(t^{n+1}, y^{n+1})$ $q = 1$, $p = 1$

②

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου

$$y^{n,1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1})$$
$$t^{n,1} = t^n + h/2$$
$$\overline{y^{n+1} = y^n + h\, f(t^{n,1}, y^{n,1})}$$

Η μόνη μέθοδος RK με $q=1$ και $p=2$

③ Ημιπεπλεγμένη

$$\begin{array}{cc|c} \lambda & 0 & \lambda \\ 1-2\lambda & \lambda & 1-\lambda \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$$

$q=2$ $p=2$

αν $\lambda = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{3}} \rightarrow p=3$

$$y^{n,1} = y^n + \lambda h\, f(t^{n,1}, y^{n,1})$$
$$t^{n,1} = t^n + \lambda h$$
$$y^{n,2} = y^n + h\left[(1-2\lambda) f(t^{n,1}, y^{n,1}) + \lambda f(t^{n,2}, y^{n,2})\right]$$
$$t^{n,2} = t^n + (1-\lambda)h$$
$$\overline{y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2} \sum_{j=1}^{2} f(t^{n,j}, y^{n,j})}$$

④ Μέθοδος Gauss-Legendre με $q=2$

$$\begin{array}{cc|c} 1/4 & 1/4-b & 1/2-b \\ 1/4+b & 1/4 & 1/2+b \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$$

$b = \sqrt{3}/6 \longrightarrow p=4$ Η μονη μέθοδος με $p=4$ και $q=2$

Παρατήρηση: Για την μέγιστη τάξη ακρίβειας

Αν έχω άμμεσες μεθόδους με:

- $q=1,2,3,4 \rightsquigarrow \max p = q$
- $q=5,6,7 \rightsquigarrow \max p = q-1$

Αν έχω πεπλεγμένη μέθοδο

$\forall q \quad \max p = 2q$

Υπάρχει μόνο μια μέθοδο με q στάδια κάθε φορά που έχει $p = 2q$

Ε9 Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 26/3/2019

Οι μέθοδοι RK αντιστοιχούν σε μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης

π.χ $y^{n+1} = y^n + h \cdot \sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j})$

$t^{n,j} = t^n + c_j h$

Έστω ότι έχω τον κανόνα αριθμητικής ολοκλήρωσης

$\int_0^1 \psi(t)\,dt \cong \sum_{j=1}^{q} b_j \psi(\tau_j)$

Θα πρέπει να μπορεί να ολοκληρώσει ακριβώς την $\psi(t) = 1$

άρα $1 = \sum_{j=1}^{q} b_j$

$$y'(t) = f(t, y(t)) \longrightarrow \int_{t^n}^{t^{n+1}} y'(s)\,ds = \int_{t^n}^{t^{n+1}} f(s, y(s))\,ds \Leftrightarrow$$

$$y(t^{n+1}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \underbrace{f(s, y(s))}_{\psi(s)}\,ds$$

← Εφαρμόζω κανόνα ολοκλήρωσης στο $[t^n, t^{n+1}]$

κάνω αλλαγή μεταβλητών για να πάω στο $[0,1]$ που έχω ήδη κανόνα

$s = (t^{n+1} - t^n)x + t^n = t^n + hx$

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \psi(s)\,ds = \int_0^1 \psi(t^n + hx)\,h\,dx = h\int_0^1 \psi(t^n + hx)\,dx \simeq h \sum_{j=1}^{q} b_j \psi(\overbrace{t^n + c_j h}^{t^{n,j}})$$

$$y(t^{n+1}) \cong y(t^n) + h \cdot \sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j}) \longrightarrow y^{n+1} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

$$y'(t) = f(t, y(t)) \quad , \quad \int_{t^n}^{t^{n,i}} y' = \int_{t^n}^{t^{n,i}} f(\ldots) \rightsquigarrow t^{n,i} = t^n + c_i h$$

q κανόνες αριθμητικής ολοκλήρωσης

$$\int_0^{\tau_i} \psi(t)\,dt \approx \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} \psi(\tau_j) \quad 1 \le i \le q$$

---

f συνεχής, $t \in [\alpha, b]$, $y \in \mathbb{R}$ και πληροί συνθήκη Lipschitz $|f(t,y) - f(t,z)| \le L|y - z|$

$y' = f(t, y)$ (απλή Δ.Ε για ευκολία)

$y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad 1 \le i \le q$ $\quad$ $q \times q$ μη γραμμικό σύστημα

$$Y = \begin{bmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^q \quad \text{και ορίζω} \quad F(Y) = \begin{bmatrix} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \\ \vdots \\ f(t^{n,q}, y^{n,q}) \end{bmatrix}$$

$$Y = \overbrace{y^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} + h\, A \underbrace{F(Y)}_{\sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} F_j(Y)}}^{\Phi(Y)}$$

$Y = \Phi(Y)$ πληροί ένα πρόβλημα σταθερού σημείου
Το ερώτημα είναι πότε αυτή η απεικόνιση έχει μοναδικό σταθερό σημείο $Y^* \in \mathbb{R}^q$ (Η Φ είναι συνεχής από τις υποθέσεις μας)

Πρέπει $\|\Phi(Y) - \Phi(Z)\| \leq \alpha \|Y - Z\|$, $0 < \alpha < 1$ $\forall\, Y, Z \in \mathbb{R}^q$
αρκεί να δείξουμε ότι η Φ είναι συστολή στον $\mathbb{R}^q$

Θα πάρω $\Phi_i(Y) - \Phi_i(Z) = y^n + h \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) - y^n - h \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}) \Rightarrow$

$$|\Phi_i(Y) - \Phi_i(Z)| \leq h \sum_{j=1}^{q} |\alpha_{ij}| \left(|f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})| \right) \leq hL \sum_{j=1}^{q} |\alpha_{ij}| \, |y^{n,j} - z^{n,j}|$$
$$\leq hL \left(\sum_{j=1}^{q} |\alpha_{ij}| \right) \cdot \|Y - Z\|_\infty \quad , 1 \leq i \leq q$$
$$\leq h \cdot L \max_i \left(\sum_{j=1}^{q} |\alpha_{ij}| \right) \|Y - Z\|_\infty \iff$$

$$|\Phi_i(Y) - \Phi_i(Z)| \leq h \cdot L \|A\|_\infty \cdot \|Y - Z\|_\infty \iff \|\Phi(Y) - \Phi(Z)\|_\infty \leq h L \|A\|_\infty \|Y - Z\|_\infty$$

Συμπέρασμα.
Αν $h \cdot L \|A\|_\infty < 1$ τότε Φ είναι συστολή στον $\mathbb{R}^q$, δηλαδή το μη γραμμικό σύστημα έχει μοναδική λύση.