Μάθημα 6ο Εφ. Υπολογιστικά Μαθηματικά I 1/4/2019

$y' = f(t,y)$, $\alpha \le t \le \beta$
$y(\alpha) = y_0$
$y \in \mathbb{R}^n$ γενικά

$$y^n \xrightarrow{RK} y^{n+1}$$

$$y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad 1 \le i \le q$$
$$t^{n,i} = t^n + c_i h$$
$$y^{n+1} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

1. Θεώρημα "Ευστάθειας"

$A = (\alpha_{ij})_{q\times q}$

Πρόταση: Έστω ότι $h \le h_0 < \frac{1}{L\cdot\|A\|_\infty}$ και έστω y^n, z^n:

$$y^{n,i} = y^n + h\sum_{j}^{q} \alpha_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \quad 1 \le i \le q \qquad z^{n,i} = z^n + h\sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} f(t^{n,j}, z^{n,j}) \quad 1 \le i \le q$$
$$y^{n+1} = y^n + h\sum_{j}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j}) \qquad z^{n+1} = z^n + h\sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, z^{n,j}) + \delta^n$$

$$y^n \ne z^n$$

Τότε $\max_{0\le n\le N} \|y^n - z^n\| \le C_1 \|y^0 - z^0\| + C_2 \frac{1}{h} \max_n \|\delta^n\|$ όταν C_1, C_2 σταθερές ανεξάρτητες των h, y^n, z^n

Παρατήρηση: Αν $\delta^n = 0$ τότε $\max_n \|y^n - z^n\| \le C_1 \|y^0 - z^0\|$ "Ευστάθεια" της μεθόδου RK

Απόδειξη: $y^{n,i} - z^{n,i} = y^n - z^n + h\sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij}\left(f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})\right) \quad 1 \le i \le q.$

$$\|y^{n,i} - z^{n,i}\| \le \|y^n - z^n\| + h\sum_{j=1}^{q} |\alpha_{ij}| \cdot \| f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})\|$$

$$\|y^{n,i} - z^{n,i}\| \le \|y^n - z^n\| + h\cdot L \sum_{j=1}^{q} |\alpha_{ij}| \, \|y^{n,i} - z^{n,i}\| \le \|y^n - z^n\| + h\, h \max_i \sum_j |\alpha_{ij}| \max_{1\le j\le q} \|y^{n,j} - z^{n,j}\|$$

$$\max_i \|y^{n,i} - z^{n,i}\| \le \|y^n - z^n\| + h\cdot L\, \|A\|_\infty \max_{1\le j\le i} \|y^{n,j} - z^{n,j}\| \qquad \text{όμως } hL\|A\|_\infty < h_0 L \|A\|_\infty < 1$$

$$\underbrace{(1 - h_0 L \|A\|_\infty)}_{>0} \max_{1\le j\le q} \|y^{n,j} - z^{n,j}\| \le \|y^n - z^n\|$$

$$\max_{1\le j\le q} \|y^{n,j} - z^{n,j}\| \le C \|y^n - z^n\| \qquad C = \frac{1}{1 - h_0 L \|A\|_\infty}$$

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h \sum_{j=1}^{q} b_j \left(f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j}) \right) - \delta^n$$

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\| + hL \sum_{j=1}^{q} b_j \|y^{n,j} - z^{n,j}\| + \|\delta^n\|$$

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\| + hL \Big(\sum_{j=1}^{q} |b_j|\Big) C \|y^n - z^n\| + \|\delta\|^n$$

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \Big(1 + h\overbrace{L \sum_{j=1}^{q} |b_j|}^{\tilde{C}}\Big) \|y^n - z^n\| + \max_n \|\delta^n\| \qquad n = 0, 1, \dots$$

Εφαρμόζω το γνωστό λήμμα

$$\|y^n - z^n\| \le e^{nh\tilde{C}} \|y^0 - z^0\| + \frac{e^{nh\tilde{C}} - 1}{h\tilde{C}} \max_n \|\delta^n\|$$

$$\max_{0 \le n \le N} \|y^n - z^n\| \le e^{Nh\tilde{C}} \|y^0 - z^0\| + \frac{e^{Nh\tilde{C}} - 1}{h\tilde{C}} \max_n \|\delta^n\|$$

$$\max_{0 \le n \le N} \|y^n - z^n\| \le C_1 \|y^0 - z^0\| + \frac{C_2}{h} \max_n \|\delta^n\| \quad , \; C_1 = e^{(b-a)\tilde{C}} \; , \; C_2 = (e^{(b-a)\tilde{C}} - 1) / \tilde{C}$$

Τάξη ακρίβειας μεθόδου RK

$h \le h_0 < 1/(L \|A\|_\infty)$

$$\zeta^{n,i} = y(t^n) + h \sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, \zeta^{n,j}) \qquad 1 \le i \le q$$

Τοπικό σφάλμα

$$\delta^n := y(t^{n+1}) - \Big[y(t^n) + \sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, \zeta^{n,j}) \Big]$$

Ορισμός: Λέμε ότι η μέθοδος RK $\begin{array}{c|c} A & c \\ \hline b & \end{array}$ έχει τάξη ακρίβειας p ($p \in \mathbb{Z}^+$) αν για κάθε πρόβλημα $y' = f, y$, αρκετά ομαλές ισχύει $\max_{0 \le n \le N} \|\delta^n\| \le C \cdot h^{p+1}$, C ανεξάρτητο h (παίρνουμε το μέγιστο τέτοιο p)

Θεώρημα: Αν η τάξη ακρίβειας μιας μεθόδου RK είναι p τότε (για αρκετά ομαλές λύσεις της ΔΕ)

$$\max_{0 \le n \le N} \|y^n - y(t^n)\| \le C h^p \quad \text{(ανεξάρτητη του } h)$$

Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ

1/4/2019

Απόδειξη: $y^{n,i} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j})$

$$y^{n+1} = y^n + h\sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j})$$

$$z^n = y(t^n)$$

$$J^{n,i} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} a_{ij} f(t^{n,j}, J^{n,j})$$

$$\underset{z^{n+1}}{\underset{\|}{y(t^{n+1})}} = y(t^n) + h\sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, J^{n,j}) + \delta^n$$

Από λήμμα της ευστάθειας

$$\max_{0\le n\le N} \|y^n - \underbrace{y(t^n)}_{z^n}\| \le C_1 \|\cancelto{0}{y^0 - y(\alpha)}\| + C_2 \frac{1}{2} c h^{p+1} = C h^p$$

Παρατήρηση. Μια μέθοδος λέγεται συνεπής (consistent) αν $p \geq 1$

Συνέπεια + Ευστάθεια $\Rightarrow$ Σύγκλιση