Μάθημα 7ο   ΕΘ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ   2/4/2019

Παραδείγματα:

1
$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ \hline 0 & 1 & \end{array}$$

Άμεση μέθοδος μέσου

$q=2$

$p=?$

$$y^{n,1} = y^n \quad , t^{n,1} = t^n$$
$$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1}) \quad , t^{n,2} = t^n + h/2$$

$$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n,2}, y^{n,2})$$

Τώρα πάμε και βάζουμε J για να υπολογίσουμε την τάξη ακρίβειας.

$$J^{n,1} = y(t^n) \quad , t^{n,1} = t^n$$
$$J^{n,2} = y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, J^{n,1}) \quad , t^{n,2} = t^n + \frac{h}{2}$$

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - [y(t^n) - h f(t^{n,2}, J^{n,2})] \iff$$

τοπικό σφάλμα.

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - \Big[y(t^n) - h \cdot f\big(\overbrace{t^n + \tfrac{h}{2}}^{\alpha}, \overbrace{y(t^n) + \tfrac{h}{2} f(t^n, y(t^n))}^{\beta}\big)\Big]$$

1ο Βήμα: Αναπτύσω το $y(t^{n+1})$ με Taylor

$O(h^3)$

$$y(t^{n+1}) = y(t^n + h) = y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + \underbrace{\frac{h^3}{3!} y'''(t^n)}_{A} + \dots$$

Που σταματάμε το ανάπτυγμα?

(Αν έχουμε πληροφορία ότι η τάξη ακρίβεια είναι p σταματάμε στο $O(h^{p+1})$)

2ο Βήμα: Αντικαθιστώ στο προηγούμενο ανάπτυγμα $y' = f(t,y)$, $y'' = \dots$

$y = y(t)$ η λύση της ΔΕ   ξέρω ότι $y' = f(t,y)$

$$y'' = \frac{d}{dt} y' = \frac{d}{dt} f(t, y(t)) = f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) f(t, y(t))$$

$$y''' = \frac{d}{dt} y'' = dt \left[f_t(t, y(t)) + f_y(t, y(t)) f(t, y(t)) \right]$$

Σε σύστημα $f_i(t, y(t)) \to f_i(t, y_1, \dots, y_n)$, $\frac{d}{dt} f_i \dots = \frac{\partial f_i}{\partial t} + \frac{\partial f_i}{\partial y_1} y_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_n} y_n$

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h\, f(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2}\left[f_t(t^n, y(t^n)) + f_y(t^n, y(t^n))\, f(t^n, y(t^n)) \right] + A$$

3º Βήμα: Ανάπτυγμα του $[y(t^n) + h f(\dots)]$

Τύπος Taylor: $f(t+\alpha, y+\beta) = f(t,y) + \alpha f_t(t,y) + \beta f_y(t,y) + \frac{1}{2}\left[\alpha^2 f_{tt}(t,y) + 2\alpha\beta f_{ty}(t,y) + \beta^2 f_{yy}(t,y)\right]$ $\overbrace{}^{O(\alpha^2, \beta^2)}$

$+ O(\alpha^3, \beta^3, \alpha^2\beta, \alpha\beta^2)$, $\left(\frac{1}{n!}(\alpha\partial_t + \beta\partial_y)^n f\right)$

$\alpha = h/2$

$\beta = \frac{h}{2} f(t^n, y(t^n))$

$$[\dots] = y(t^n) + h\left[f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2} f(t^n, y(t^n)) f_y(t^n, y(t^n)) + B \right] \rightarrow O(h^2)$$

$$= y(t^n) + h\, f(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2} f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2} f(t^n, y(t^n)) f_y(t^n, y(t^n)) + \overbrace{h \cdot B}^{O(h^3)}$$

4º Βήμα: Αφαιρώ

$\delta^n = \dots = \underbrace{A - hB} = O(h^3) \rightsquigarrow |\delta^n| \leq C h^3 \rightsquigarrow p \geq 2$

μπορεί να είναι 3?

Για να το ελέγξουμε παίρνουμε ένα παράδειγμα.

Θεωρούμε την ΔΕ $y' = t^2$, υπολογίζουμε $y'' = 2t$, $y''' = 2 \neq 0$

Διαλέγουμε τέτοια f έτσι ώστε $f^{(p+1)} \neq 0$ (να είναι σταθερή)

οτι και να κάναμε $A = \frac{h^3}{6} 2 = \frac{1}{3} h^3$ και $f(t,y) = f(t)$

$f = t^2$, $f_t = 2t$, $f_{tt} = 2$

$B = \frac{1}{2}\left[\frac{h^2}{4} \cdot 2\right]$ έτσι $A - hB = h^3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right] \neq 0$

Άρα η τάξη ακρίβειας είναι 2. Γιατί αν ήταν 3 τότε σε αυτό το παράδειγμα το $A - hB$ θα έπρεπε να είναι 0

2

$$\begin{array}{c|c} 1/2 & 1/2 \\ \hline & 1 \end{array}$$

πεπλεγμένη μέθοδος μέσου

$y^{n,1} = y^n + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, y^{n,1})$

$t^{n,1} = t^n + h/2$

$y^{n+1} = y^n + h\, f(t^{n,1}, y^{n,1})$

Παρατήρηση: $h f(t^{n,1}, y^{n,1}) = 2(y^{n,1} - y^n)$

Άρα $y^{n+1} = -y^n + 2y^{n,1}$

$Y^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{2} f(t^{n,1}, Y^{n,1})$

$t^{n,1} = t^n + h/2$

$\delta^n = y(t^{n+1}) - [y(t^n) + h f(t^{n,1}, Y^{n,1})] = y(t^{n+1}) - [y(t^n) + 2Y^{n,1} - 2y(t^n)] \Rightarrow$

Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ — 2/4/2019

$$\delta^n = y(t^{n+1}) + y(t^n) - 2J^{n,1}$$

Βήμα 1: $y(t^{n+1}) = y(t^n+h) = y(t^n) + h\,y'(t^n) + \frac{h^2}{2}y''(t^n) + A$

Βήμα 2: $= y(t^n) + h\,f(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2}\left(f_t(t^n, y(t^n)) + f_y(t^n, y(t^n))\,f(t^n, y(t^n))\right] + A$

$= y(t^n) + h\,f(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2}f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2}f_y(t^n, y(t^n))\,f(t^n, y(t^n)) + A \rightarrow O(h^3)$

Βήμα 3: $J^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{2}f(t^n+\frac{h}{2}, J^{n,1}) = y(t^n) + \frac{h}{2}f\left(t^n+\frac{h}{2}, y(t^n) + \frac{h}{2}f(t^{n,1}, J^{n,1})\right)$

$\overset{\text{Taylor}}{=} y(t^n) + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2}f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2}f(t^{n,1}, J^{n,1})\cdot f_y(t^n, y(t^n)) + \overset{O(h^2)}{B}\right] \Rightarrow$

$$J^{n,1} = y(t^n) + \frac{h}{2}f(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{4}f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{4}f(t^{n,1}, J^{n,1})\,f_y(t^n, y(t^n)) + \frac{h}{2}B$$

Βήμα 4: $\delta^n = y(t^n) + h\,f(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2}f_t(t^n, y(t^n)) + \frac{h^2}{2}f_y(t^n, y(t^n))\,f(t^n, y(t^n)) + A + y(t^n)$
$- 2y(t^n) - h\,f(t^n, y(t^n)) - \frac{h^2}{2}f_t(t^n, y(t^n)) - \frac{h^2}{2}f(t^{n,1}, J^{n,1})\,f_y(t^n, y(t^n)) - hB \Rightarrow$

$$\delta^n = \frac{h^2}{2}f_y(t^n, y(t^n))\,[\underbrace{f(t^n, y(t^n)) - f(t^{n,1}, J^{n,1})}_{*}] + A - hB$$

πάμε να δούμε το $* = f(t^n, y(t^n)) - f(t^{n,1}, J^{n,1}) = f(t^n, y(t^n)) - f(t^n+\frac{h}{2}, y(t^n) + \frac{h}{2}f(t^{n,1}, J^{n,1}))$
$= f(t^n, y(t^n)) - [f(t^n, y(t^n)) + O(h)] = O(h)$

Άρα $\delta^n = \frac{h^2}{2}f_y(t^n, y(t^n))\cdot O(h) + A - hB = O(h^3)$

Άρα $p \geq 2$ (Από γενικό θεώρημα $p_{max} = 2q \Rightarrow p = 2$)

3. Απόλυτη Ευστάθεια και Άκαμπτα Συστήματα

Για μεθόδους RK: "Ευστάθεια": $\underset{\text{πληρούν RK}}{y^n, z^n} \rightarrow \max_{0\le n\le N} \|y^n - z^n\| \le C\cdot\|y^0 - z^0\|$

$C = (RK, L, b-a, q)$

$C \sim e^{L(b-a)\tilde{C}}$