Μάθημα 8ο   Εφ. Υπολογιστικά Μαθηματικά II   8/4/2019

"Ευστάθεια" RK

y^n, z^n λύσεις μιας μεθόδου RK

Ευστάθεια σημαίνει $\exists$ $C>0$ ανεξάρτητη του h τ.ω

$\max_{0\le n\le N} \|y^n - z^n\| \le C\cdot\|y^0 - z^0\|$, $C = C(\alpha, \beta, y, L, R_K)$

Παράδειγμα ειδικού αλλά ενδιαφέροντος προβλήματος

(1) $\begin{cases} \lambda<0 \\ y' = \lambda y, & t\ge 0 \\ y(0)=1 \end{cases}$ η λύση είναι $y(t) = e^{\lambda t}$

Πως συμπεριφέρεται μια αριθμητική μέθοδος (π.χ Euler) όταν εφαρμοστεί σε αυτό το πρόβλημα.

$h>0$ $y^n \approx y(t^n)$, $t^n = nh$

$y^{n+1} = y^n + h f(t^n, y^n)$ $n=0,1,\dots$

$y^{n+1} = y^n + h\cdot\lambda y^n \longrightarrow y^{n+1} = (1+h\lambda)y^n$

$y^0 = 1$

$y^n = (1+h\lambda)^n$, $n = 0,1,\dots$

Παρατηρήσεις

1) Η y^n "συγκλίνει" στην $y = e^{\lambda t}$

Αν $t = \text{fixed}$ $nh = t$ $\underset{n\to\infty}{\overset{h\to 0}{}}$ $nh = t$ τότε

$y^n = (1+h\lambda)^n = \left(1+\lambda\frac{t}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\lambda t}$

· $h>0$ μικρό αλλά πεπερασμένο

$n\to\infty$ δηλαδή $t^n = nh \to \infty$

$|y^n| = |1+h\lambda|^n \longrightarrow \begin{cases} 0 & ,\text{αν } |1+h\lambda|<1 \quad (1) \\ 1 & ,\text{α } |1+h\lambda| = 1 \quad (2) \\ \infty & ,\text{αν } |1+h\lambda|>1 \quad (3) \end{cases}$

(i) $-1 < 1 + h\lambda < 1$

$-2 < h\lambda \longrightarrow$ δηλαδή $0 < h < -\frac{2}{\lambda}$. $y^n \to 0$

(ii) $1 + h\lambda = 1 \longrightarrow h = -\frac{2}{\lambda}$, $y^n \to 1$

(iii) αν $h > -\frac{2}{\lambda}$ τότε $|y^n| \longrightarrow \infty$

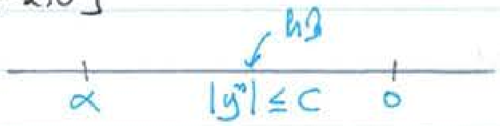
Ορισμός (προσωρινός)

Μια αριθμητική μέθοδος λέγεται απόλυτα ευσταθής για κάποιο $h>0$, άν όταν εφαρμοστεί στο πρόβλημα δίνει ακολουθία $\{y^n\}$ που είναι φραγμένη

(πχ η μέθοδος Euler είναι απόλυτα ευσταθής όταν $0<h\leq -\frac{2}{\lambda}$)

Το μέγιστο διάστημα της μορφής $I=[\alpha, 0]$ όταν $\alpha<0$ (ή $\alpha=-\infty$) τέτοιο ώστε για $h\lambda \in [\alpha, 0]$ η μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής, λέγεται διάστημα απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου

(πx η Euler $I=[-2,0]$



Θέλουμε $|\alpha|$ όσο το δυνατόν μεγαλύτερο

$h\lambda \geqslant \alpha \Rightarrow h \leq \frac{\alpha}{\lambda}$ αν $|\lambda| >> 1$ τότε το h πρέπει να ληφθεί πολύ μικρό

Έστω ότι έχω τη μέθοδο Euler y^n, $n=0,1,\ldots$

πχ λόγω σφαλμάτων αριθμητικής

και έστω στη θέση κ βρίσκω αντί για $y^\kappa \longrightarrow z^\kappa$ $y^\kappa \neq z^\kappa$

$y^n \qquad z^n$

$y^{n+1} = (1+h\lambda)y^n \quad n \geqslant \kappa \qquad z^{n+1} = (1+h\lambda)z^n \quad n\geqslant \kappa$

$y^m = (1+h\lambda)^{m-\kappa} y^\kappa, \; m>\kappa \qquad z^m = (1+h\lambda)z^\kappa \quad m>\kappa$

$|y^m - z^m| = |1+h\lambda|^{m-\kappa} |y^m - z^m|$

8/4/2019

Εφ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ

- Αν $|1+h\lambda| \le 1$ δηλαδή αν είχα απόλυτη ευστάθεια
$$|y^m - z^m| \le |y^k - z^k|$$

- Αν όμως $|1+h\lambda|>1$ τότε $|y^m - z^m| \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$

"Ευστάθεια"

$y' = \lambda y$ $\quad y(t) = e^{\lambda t}$ $\quad$ (Η σταθερά Lipschitz είναι $L = |\lambda|$ εδώ)

$y(0) = 1$

$y' = \lambda y \quad \rightsquigarrow \quad y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ $\quad | \quad$ $z' = \lambda z \quad \rightsquigarrow \quad y(t) = z_0 e^{\lambda t}$

$y(0) = y_0$ $\quad | \quad$ $z(0) = z_0$

$$y(t) - z(t) = e^{\lambda t}(y_0 - z_0)$$
$$|y(t) - z(t)| = e^{\lambda t}|y_0 - z_0| \to 0 \quad t \to \infty$$

$y^m = (1+h\lambda)^m \cdot y_0$ $\qquad |y^m - z^m| = |1+h\lambda|^m \, |y_0 - z_0|$

$z^m = (1+h\lambda)^m \cdot z_0$ $\qquad$ αν $h\lambda \in [\alpha, 0]$

$|y^m - z^m| \le |y_0 - z_0|$ $\quad$ (αν $\lambda h \in (\alpha, 0)$ $|y^m - z^m| \xrightarrow{m\to\infty} 0$)

αν $h\lambda < \alpha$ τότε $|y^m - z^m| \xrightarrow{m\to\infty} \infty$

Αυτό που είπαμε ευστάθεια μεθόδου RK εξακολουθεί να ισχύει
δηλαδή $\max\limits_{0 \le m \le N} |y^m - z^m| \le C\,|y^0 - z^0|$ $\quad Nh = T < \infty$ $\quad 0 \le t \le T$

Αυτό ισχύει ακόμα και όταν $h\lambda \notin [\alpha, 0]$

$|y^m - z^m| = |1+h\lambda|^m |y^0 - z^0|$

- $|1+h\lambda| \le 1 + h|\lambda|$

$|1+h\lambda|^m \le (1+h|\lambda|)^m \le e^{h|\lambda| m} \le e^{|\lambda| T} \rightsquigarrow |y^m - z^m| \le \underbrace{e^{|\lambda|T}}_{=C} |y^0 - z^0|$

$\max\limits_{0 \le m \le N} |y^m - z^m| \le C\,|y^0 - z^0|$ $\quad$ (άρα εξακολουθεί να ισχύει η ευστάθεια της μεθόδου)

$$\begin{cases} y' = Ay , & t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

$y(t) \in \mathbb{R}^m \quad t \geq 0 \qquad A = (\alpha_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times m} \qquad 1 \leq i,j \leq m$

$y_0 \in \mathbb{R}^m$

• Έστω ότι ο A είναι διαγωνοποιήσιμος
Έστω $\lambda_i \in \mathbb{C}$ $1 \leq i \leq m$ ιδιοτιμές του A και $v_i \in \mathbb{C}^m$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\underset{m\times m}{S} = [v_1 \mid v_2 \mid \dots \mid v_m]$, άρα $\exists$ ο S^{-1}

$$S^{-1}y = S^{-1}ASS^{-1}y \quad \rightsquigarrow \quad S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \emptyset \\ & \lambda_2 & \\ \emptyset & & \ddots & \\ & & & \lambda_m \end{bmatrix} = \Lambda$$

άρα $S^{-1}y' = \Lambda S^{-1}y$ θέτω $z = S^{-1}y \rightsquigarrow z' = S^{-1}y'$

Άρα το πρόβλημά μου γράφεται

$$\begin{cases} z' = \Lambda z & t \geq 0 \\ z(0) = S^{-1}y_0 \end{cases}$$

μπορώ να το λύσω

$$z_i' = \lambda_i z_i \rightarrow z_i(t) = c e^{\lambda_i t} \rightarrow z_i(t) = (S^{-1}y_0)_i \, e^{\lambda_i t} \quad t \geq 0$$

Άρα $y = Sz \qquad \rightsquigarrow \quad y_i = \sum_{j=1}^{m} S_{ij} z_j = \sum_{j=1}^{m} S_{ij} (S^{-1}y_0)_j \, e^{\lambda_j t}$

αν $\exists$ j τω $\mathrm{Re}\lambda_j > 0$ τότε γενικά $y(t) \to \infty, \ t \to \infty$

$e^{\lambda t} = e^{\mathrm{Re}\lambda t + i \,\mathrm{Im}\lambda t}$

$$|e^{\lambda t}| = e^{(\mathrm{Re}\lambda)t} \begin{cases} \to 0 & \text{αν } \mathrm{Re}\lambda < 0 \\ = 1 & \text{αν } \mathrm{Re}\lambda = 0 \\ \to \infty & \text{αν } \mathrm{Re}\lambda > 0 \end{cases}$$

αν όμως $\forall j$ $\mathrm{Re}\lambda_j \leq 0$ η λύση είναι φραγμένη
(αν $\forall j$ $\mathrm{Re}\lambda_j < 0$, $y \to 0$, $t \to \infty$)

Αν ο πίνακας δεν διαγωνοποιείται τότε: $y_i = \sum_{j=1}^{m} d_{ij} \, e^{\lambda_j t} \, \pi_i(t)$

Μάθημα 9ο   Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ   9/4/2019

Ορισμός: Λέμε ότι μια αριθμητική μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής για κάποιο $h>0$, αν όταν εφαρμοσθεί στο πρόβλημα:

$$\begin{cases} y' = \lambda y, & t \geq 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad Re\,\lambda \leq 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

μας δίνει προσεγγίσεις y^n φραγμένες, δηλαδή:
$\exists$ C ανεξάρτητη του h : $|y^n| \leq C \quad \forall n$

Ορισμός: Το σύνολο τιμών $z = h\lambda$ τέτοιο ώστε η μέθοδος να είναι απόλυτα ευσταθής λέγεται περιοχή απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου $S \subset \{z \in \mathbb{C} : Re\,z \leq 0\}$

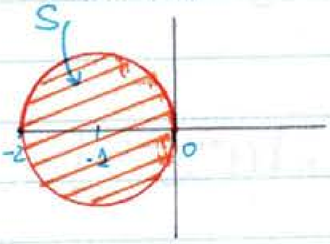
Παράδειγμα: Ποιά είναι η περιοχή απόλυτης ευστάθειας για τη μέθοδο του Euler;

$y^{n+1} = (1+h\lambda)y^n$
$y^0 = 1$

$y^n = (1+h\lambda)^n$, $n = 0, 1, \ldots$ $z = h\lambda \Rightarrow y^n = (1+z)^n$

Πότε $|y^n| \leq C$?

$|y^n| \leq C \iff |1+z| \leq 1$



Ορισμός: Ένα σύστημα $y' = Ay$ λέγεται άκαμπτο αν τα λ_i (ιδιοτιμές του A) είναι $Re\,\lambda_i \leq 0$ και $\exists$ λ_k, λ_ℓ τέτοιο ώστε $|Re\,\lambda_k| >> |Re\,\lambda_\ell|$

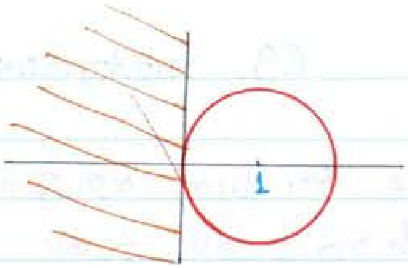
Παράδειγμα: Ποιά η περιοχή απόλυτης ευστάθειας για την πεπλεγμένη μέθοδο του Euler;

$y' = f$
$y^{n+1} = y^n + h f(t^{n+1}, y^{n+1})$

$y' = \lambda y \quad Re\,\lambda \leq 0 \quad \rightsquigarrow y^{n+1} = y^n + h\lambda y^{n+1} \iff (1-h\lambda)y^{n+1} = y^n \iff$
$y^{n+1} = \dfrac{1}{1-h\lambda} y^n \iff y^n = \left(\dfrac{1}{1-h\lambda}\right)^n \quad n = 0, 1, \ldots$

$z = h\lambda$

$y^n = \dfrac{1}{(1-z)^n}$ $\quad n=0,1\ldots$



$|y^n| \le C \iff \dfrac{1}{|1-z|} \le 1 \qquad \mathrm{Re}\, z \le 0 \implies S: \mathrm{Re}\, z \le 0 : |z-1| \ge 1$

(ότι είναι στο εξωτερικό του δίσκου $\cap$ με το $\mathrm{Re}\, z \le 0$)

Ορισμός: Μια μέθοδος λέγεται A-ευσταθής αν η περιοχή απόλυτης ευσταθειάς της S είναι το $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \le 0\}$

Παράδειγμα: Μέθοδος του τραπεζίου $\quad q=2, \ p=2$

$$\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$$

Ποιά η S?

$y^{n,1} = y^n \quad , \ t^{n,1} = t^n$

$y^{n,2} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^{n,1}, y^{n,1}) + f(t^{n,2}, y^{n,2})\right] \quad . \ t^{n,2} = t^{n+1}$

$y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^{n,1}, y^{n,1}) + f(t^{n,2}, y^{n,2})\right]$

Παρατήρηση: $y^{n+1} = y^{n,2}$

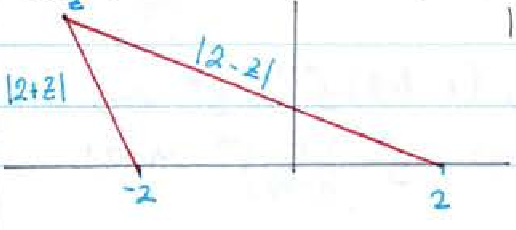
Άρα $\quad y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\left[f(t^n, y^n) + f(t^{n+1}, y^{n+1})\right]$

$f = \lambda y \implies y^{n+1} = y^n + \frac{h}{2}\lambda y^n + \frac{h}{2}\lambda y^{n+1} \implies$

$\left(1 - \frac{h}{2}\lambda\right) y^{n+1} = \left(1 + \frac{h}{2}\lambda\right) y^n \overset{z=h\lambda}{\implies} \left(1 - \frac{z}{2}\right) y^{n+1} = \left(1 + \frac{z}{2}\right) y^n \implies$

$y^{n+1} = \left(\dfrac{1+\frac{z}{2}}{1-\frac{z}{2}}\right) y^n \implies y^n = \left(\dfrac{2+z}{2-z}\right)^n \quad n = 0,1,2,\ldots$

$S = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \le 0 , \ |2+z/2-z| \le 1\} \iff \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \le 0 , \ |z+2| \le |2-z|\}$



$|2+z| \le |2-z| \iff |2+z|^2 \le |2-z|^2 \iff$

$(2+z)(2+\bar{z}) \le (2-z)(2-\bar{z}) \iff \ldots \iff z + \bar{z} \le 0$

$2 \cdot \mathrm{Re}\, z \le 0$

Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ

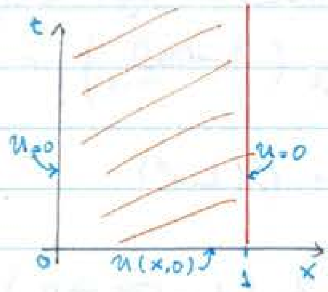
9/4/2019

Παράδειγμα: $u = u(x,t)$, $0 \le x \le 1$, $t \ge 0$

ΜΔΕ: $u_t = u_{xx}$, $0 \le x \le 1$, $t \ge 0$

ΑΣ: $u(x,0) = v(x)$ $0 \le x \le 1$

ΣΣ: $u(0,t) = 0$, $u(1,t) = 0$ $t \ge 0$



Βήμα 1: Ημιδιακριτοποίηση ως προς x (με τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών)

$x_i = i \cdot \Delta x$, $i = 0, \dots, m+1$ $\Delta x = 1/m+1$

$U_i(t) \simeq u(x_i, t)$ $t \ge 0$

$u_t(x_i,t) \simeq \frac{d}{dt} U_i(t)$

$u_{xx}(x_i,t) \simeq \frac{1}{\Delta x^2}\left[u(x_{i-1},t) - 2u(x_i,t) + u(x_{i+1},t)\right]$

$1 \le i \le m$

Άρα $u_t(x_i,t) = u_{xx}(x_i,t) \longrightarrow u_t(x_i,t) \simeq \frac{1}{\Delta x^2}\left[u(x_{i-1},t) - 2u(x_i,t) + u(x_{i+1},t)\right]$ $1 \le i \le m$

Βήμα 2ο

$u(x_i,t) = U_i(t)$

$$\frac{d}{dt} U_i = \frac{1}{\Delta x^2}\left[U_{i-1} - 2U_i + U_{i+1}\right] \quad 1 \le i \le m, \ t \ge 0$$

$U_0 = U_{m+1} = 0$ $t \ge 0$

$U_i(0) = v(x_i)$ $i = 1, \dots, m$ και άρα έχω το σύστημα ΔΕ

$$\frac{dU}{dt} = AU \ , \ t \ge 0$$

$$U(0) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} \qquad A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{bmatrix} -2 & 1 & & & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \boxed{1 \ \ -2 \ \ 1} & & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

A συμμετρικός , $-A$ θετικά ορισμένος

$(x^T(-A)x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m_{\neq 0})$

$\lambda_j = -\frac{2}{\Delta x^2}\left(1 - \cos\frac{j\pi}{m+1}\right)$ $j = 1, \dots, m$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$ και $\lambda_j < 0$ $1 \le j \le m$

Είναι προφανές $\lambda_{j+1} < \lambda_j \qquad m >> 1$

$$\lambda_1 = -\frac{2}{\Delta x^2}\left(1-\cos\frac{\pi}{m+1}\right) = -\frac{2}{\Delta x^2}\left(1-\underset{0<x\ll 1}{\cos \pi\Delta x}\right) = -\frac{2}{\Delta x^2}\left(1-1+\frac{\Delta x^2}{2!}-O(\Delta x^4)\right) \Rightarrow$$

$$\lambda_1 = -\pi^2 + O(\Delta x^2)$$

$$\lambda_{m+1} = -\frac{2}{\Delta x^2}\left(1-\cos\frac{m\pi}{m+1}\right) = -2(m+1)^2\left(1-\cos\frac{m\pi}{m+1}\right) \underset{m\to\infty}{\simeq} -4(m+1)^2$$

$$\lambda_{m+1} \simeq -4(m+1)^2 \qquad m>>1$$

Αν χρησιμοποιούσα Euler $h\lambda \in [-2,0] \Rightarrow \Delta t\,\lambda_i \in [-2,0]$

$$\Delta t\,\lambda_{m+1} \geq -2 \rightsquigarrow \Delta t \leq \frac{-2}{\lambda_{m+1}} \approx \frac{-2}{-4(m+1)^2} \approx \frac{\Delta x^2}{2}$$