Μάθημα 10ο Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 15/4/2019

Παρένθεση: Αναμένεται αυτή η συμπεριφορά των ιδιοτιμών του A.

$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \rightsquigarrow (AU)_i \approx u_{xx}(x_i,t)$$

$u_{xx} = \lambda u$, $u=u(x)$, $\underline{u(0)=u(1)=0}$ $\longrightarrow$ $u'' = \lambda u$, $0 \le x \le 1$, $u(0)=u(1)=0$

$e^{\rho t}$ $\rho^2 = \lambda$

- $\lambda > 0$ $\rho_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$, $u = c_1 e^{\sqrt{\lambda} t} - c_2 e^{-\sqrt{\lambda} t} \xrightarrow{u(0)=u(1)=0} c_1 = c_2 = 0$
- $\lambda = 0$ $\rho_{1,2} = 0$, $u = c_1 + c_2 t \xrightarrow{u(0)=u(1)=0} c_1 = c_2 = 0$
- $\lambda < 0$ $\rho_{1,2} = \pm i\sqrt{|\lambda|}$, $u = c_1 \cdot \cos(\sqrt{|\lambda|}\cdot t) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{|\lambda|} t) \xrightarrow{u(0)=u(1)=0} c_1 = 0$

$\lambda \notin \mathbb{C}$ ↳ $\int u''\bar{u} = \lambda \int |u|^2 \rightsquigarrow -\int u'\bar{u}' = \lambda\int|u|^2$, $-\int |u'|^2 = \lambda \int |u|^2 \rightsquigarrow \lambda \in \mathbb{R}$ ↳ $\lambda_n = -n^2\pi^2$, $n=1,2,\dots$

Άκαμπτο σύστημα $\lambda_i = \lambda_i(A)$ $|\lambda_m| \gg |\lambda_1| \approx \pi^2$, $\lambda_i < 0$

Διάστημα απόλυτης ευστάθειας

- άμεση μέθοδος Euler $= [-2,0]$ $\lambda_i \Delta t \in [-2,0]$, $p=1$

$-2 \le \lambda_i \Delta t \rightsquigarrow -2 \le \lambda_m \Delta t \rightsquigarrow \Delta t \le -\frac{2}{\lambda_m} \cong -\frac{2}{-4}\Delta x^2 \rightsquigarrow \Delta t \le \frac{\Delta x^2}{2}$

$U^{n+1} = U^n + \Delta t A U^n = (I + \Delta t A) U^n$

- μέθοδος του τραπεζίου

$U^{n+1} - U^n = \frac{\Delta t}{2}(AU^{n+1} + AU^n)$ $n=0,1,\dots$ $U^n = U(n\Delta t)$ $U^0 = U(0)$ $p=2$.

$(I - \frac{\Delta t}{2}A)U^{n+1} = (I + \frac{\Delta t}{2}A)U^n$ $(I - \frac{\Delta t}{2}A)$ θετικά ορισμένος $\xrightarrow{\text{cholesky}} L \cdot L^T$

$LL^T U^{n+1} =$ γνωστό $\rightsquigarrow O(m)$ πράξεις σε κάθε χρονικό βήμα.

A - ευσταθής μέθοδο $\rightsquigarrow (-\infty, 0]$

$y' = \lambda y$, $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, $t \ge 0$
$y(0) = 1$ $|y(t)| = e^{\mathrm{Re}\lambda\, t}$

Έστω μια αριθμητική μέθοδος

$y^{n+1} = r(z)\cdot y^n$, $z = h\lambda$ $\mathrm{Re}\, z \le 0$

- Euler άμεση $r(z) = 1+z$
- Euler πεπλεγμένη $r(z) = 1/(1-z)$
- Τραπεζίου $r(z) = (1+z/2)/(1-z/2)$

①

RK $\quad A = (\alpha_{ij})$ | $\tau_1 \dots \tau_q$; $b_1 \dots b_q$

$y' = \lambda y$

$y^{n,i} = y^n + h\lambda \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} y^{n,j} \qquad 1 \le i \le q$

$y^{n+1} = y^n + h\lambda \sum_{j=1}^{q} b_j y^{n,j}$

$Y^n = \begin{pmatrix} y^{n,1} \\ \vdots \\ y^{n,q} \end{pmatrix} \qquad Y^n = y^n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + h\lambda A Y^n \longrightarrow (I - h\lambda A) Y^n = y^n \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}}_{u}$

$\Rightarrow Y^n = (I - h\lambda A)^{-1} y^n u$ — υποθέτω αντιστρέψιμος για κάποια περιοχή

$Y^n = (I - zA)^{-1} y^n u$

$\exists (I+B)^{-1}$ αν $\|B\| < 1$

$y^{n+1} = y^n + z \cdot b^T Y^n = y^n + z \cdot b^T (I - zA)^{-1} y^n u$ — άρα $\exists (I - zA)^{-1}$ αν $|z|\,\|A\| < 1 \Rightarrow |z| < \frac{1}{\|A\|}$

$y^{n+1} = (I + z b^T (I - zA)^{-1} u)\, y^n$

$r(z) = I + z b^T (I - zA)^{-1} u \qquad Re\, z \le 0 \qquad |r(z)| < ?$

$((I - zA)^{-1})_{ij} = \dfrac{|\tilde{A}_{ij}(z)|}{\det(I - zA)}$ — $|\tilde{A}_{ij}(z)|$ ~ πολυώνυμο του z βαθμού $\le q$, $\det(I-zA)$ = πολυώνυμο z βαθμού $\le q$

Άρα $r(z)$ ρητή συνάρτηση του z

Αν άμεση μέθοδος RK $\Longrightarrow$ $r(z)$ πολυώνυμο του z βαθμού $\le q$

$A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \ddots & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \det(I - zA) = 1$

Συμπέρασμα: Καμία άμεση μέθοδος δεν είναι Α-ευσταθής.

$r(z) = \alpha_q z^q + \dots + \alpha_0$, είναι δυνατόν $|r(z)| < 1 \ \forall z : Re\, z < 0$? ΟΧΙ

$|r(z)|^2 = r(z)\, \overline{r(z)} = \dots \ z = \rho e^{i\theta} \ =$ πολυώνυμο του ρ βαθμού $\le 2q$

Στις πεπλεγμένες μεθόδους υπάρχει πάντα μια Α-ευσταθής $\forall q$

Παράδειγμα:

$\begin{array}{cc|c} b & 0 & b \\ 1-2b & b & 1-b \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$

$r(z) = \dfrac{1 + (1-2b)z + (\frac{1}{2} - 2b + b^2) z^2}{(1 - bz)^2}$

(για $b = \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{\sqrt{3}})$, $p = 3$)

Για ποια b $\quad |r(z)| \le 1 \ \forall Re\, z < 0 \iff b \ge 1/4$ Α-ευσταθής.

Ε9: Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ

15/4/2019

Παράδειγμα:

$$\begin{array}{cc|c} 1/4 & 1/4-\mu & 1/2-\mu \\ 1/4+\mu & 1/4 & 1/2+\mu \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$$

$\mu = 1/2\sqrt{3}$ $\quad q=2$, $p=4$

A - Ευσταθής.

$r(z) = \left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{12}\right) / \left(1-\frac{z}{2}+z^2/12\right)$, Ισχύει $|r(z)| \le 1$ $\forall$ $Re\,z<0$?

• $r(iy) = \dfrac{1+\frac{iy}{2}-\frac{y^2}{12}}{1-\frac{iy}{2}-\frac{y^2}{12}} = \dfrac{\left(1-\frac{y^2}{12}\right)+\frac{iy}{2}}{\left(1-\frac{y^2}{12}\right)-\frac{iy}{2}} \rightsquigarrow |r(iy)| = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

άρα πάνω στον άξονα των φανταστικών $|r(z)| = 1$

• $\lim\limits_{\substack{|z|\to\infty \\ Re\,z\le 0}} |r(z)| = 1$

• Η $r(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση στο $Re\,z \le 0$

Πόλοι θα ήταν τα σημεία : $1-\frac{z}{2}+\frac{z^2}{12}=0 \Leftrightarrow z^2-6z+12=0$

$\Rightarrow z = 3 \pm i\sqrt{3}$ (βρίσκονται όμως στο $Re\,z>0$)

Άρα είναι αναλυτική όταν $Re\,z \le 0$

Από αρχή μεγίστου για αναλυτικές συναρτήσεις $\max|r(z)|$ λαμβάνεται στο σύνορο (δείξαμε ότι είναι ίσο με 1) άρα $|r(z)| \le 1$.

Παρατήρηση: $y^{n+1} = r(z)\,y^n \qquad z=h\lambda$

$y' = \lambda y$, $y(0)=1$

$y(t) = e^{\lambda t}$ $\qquad y(t^{n+1}) = e^{\lambda t^{n+1}} = e^{\lambda(t^n+h)} = e^{\lambda t^n}\cdot e^{\lambda h} = e^z \cdot y(t^n)$

RK : $y^{n+1} = r(z)\,y^n \qquad n=0,1,\dots$

ΔΕ : $y(t^{n+1}) = e^z y(t^n)$

αναμένω $r(z) \cong e^z$ (ρητή προσέγγιση του e^z)

$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\dots$

• Euler $r(z) = 1+z \rightsquigarrow r(z) = e^z + O(z^2) \qquad p=1$

• Πεπλεγμένη $r(z) = \frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+\dots \qquad |z|<1 \rightsquigarrow r(z) = e^z + O(z^2) \quad (z\to 0)$

• Τραπέζιο. $r(z)\ \dfrac{1+z/2}{1-z/2} = (1+z/2)\left(1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}+O(z^3)\right) = 1+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}+\dfrac{z}{2}+\dfrac{z^2}{4}+\dots O(z^3)$

$r(z) = 1+z+\dfrac{z^2}{2}+O(z^3) \quad = e^z + O(z^3) \qquad p=2$

Έστω η RK έχει τάξη ακριβείας p τότε

$y^{n+1} = r(z)\, y^n \qquad \lambda=1 \quad , n=0$

$y^1 = r(z) \qquad z=h$

ΔΕ $y(t^n) = e^{\lambda h} y^0 = e^h = e^z$

$\delta = y(t^1) - y^1 = e^z - r(z) \qquad \delta = O(h^{p+1}) = O(z^{p+1}) = e^z - r(z)$

τοπικό σφάλμα

Τάξη p $\Rightarrow$ $r(z) = e^z + O(z^{p+1})$

Αν $r(z) = e^z + O(z^{p+1}) \overset{?}{\Longrightarrow}$ ακρίβεια RK είναι p. ΟΧΙ

Μάθημα 11º Εξ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 16/4/2019

Προσεγγίσεις Padé του e^z

$r(z) = \dfrac{\alpha + \beta z}{\gamma + \delta z}$ Ποιά είναι τα $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τέτοια ώστε η $r(z)$ να προσεγγίζει καλύτερα το e^z για z μικρό.

Υποθέτουμε $r(0) = 1 \Rightarrow \alpha = \gamma$

άρα $r(z) = \dfrac{1 + pz}{1 + qz}$

Να βρουμε τα p και q τέτοια ώστε οι σειρές Taylor των $r(z)$, e^z περι το $z=0$ να συμφωνούν μέχρι όρους μέγιστης τάξης.

$e^z = 1 + z + z^2/2! + z^3/3! + \dots$ $1/_{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$

$r(z) = \dfrac{1+pz}{1+qz} = (1+pz)(1 - qz + q^2z^2 - q^3z^3 + O(z^4)) = 1 - qz + q^2z^2 - q^3z^3 + O(z^4) + pz - pqz^2 + pq^2z^3$

$= 1 + (p-q)z + q(q-p)z^2 + q^2(p-q)z^3 + O(z^4)$

$p - q = 1$

$q(q-p) = \frac{1}{2}$ $q = -1/2$ $p = 1/2$

Η καλύτερη προσέγγιση $(1,1)$ (προσέγγιση padé $(1,1)$) είναι $r(z) = \dfrac{1 + z/2}{1 - z/2} = e^z + O(z^3) \longrightarrow r(z)$ του Τραπεζίου

Με τον ίδιο τρόπο η $(2,2)$ προσέγγιση Padé του e^z είναι $r(z) = \dfrac{1 + z/2 + z^2/12}{1 - z/2 + z^2/12} = e^z + O(z^5)$

Η ρητή προσέγγιση που αντιστοιχεί στην Gauss-Legard RK με 2 στάδια.

Παρατήρηση

Όλες οι προσεγγίσεις Padé της διαγωνίου της μορφής (n,n) πληρούν $|r(z)| \le 1$, $\mathrm{Re}\, z \le 0$ και μάλιστα $|r(iy)| = 1 \ \forall y \in \mathbb{R}$ (συντηρητικές μέθοδοι)

Πρόταση: Ικανή συνθήκη για Α-ευστάθεια

Έστω $r(z)$ η ρητή προσέγγιση του εκθετικού με πραγματικούς συντελεστές που αντιστοιχεί σε μέθοδο RK. Υποθέτουμε ότι

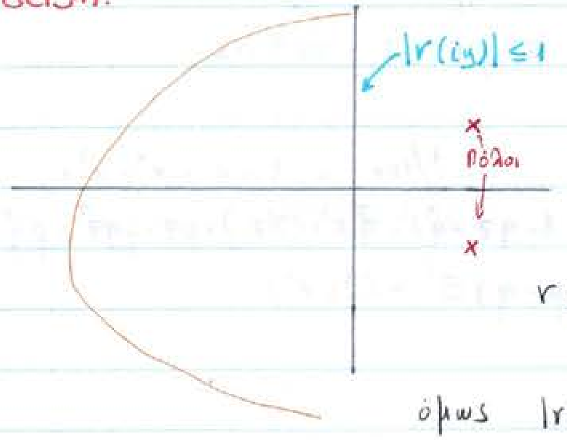
i) $r(z)$ δεν έχει πόλους για $Re\, z \leq 0$

ii) $|r(iy)| \leq 1 \quad \forall\, y \in \mathbb{R}$

iii) $(I - zA)$ αντιστρέψιμος για $Re\, z \leq 0$ (A $q \times q$ πίνακας της μεθόδου)

Τότε $|r(z)| \leq 1 \quad \forall\, z \in \mathbb{C} : Re\, z \leq 0$. Δηλαδή η μέθοδος RK είναι Α-ευσταθής.

Απόδειξη:



Είναι το $\lim\limits_{|z| \to \infty} |r(z)| \leq 1$?

Έστω $r(z) = \dfrac{1 + \alpha_1 z + \dots + \alpha_q z^q}{1 + b_1 z + \dots + b_q z^q}$

$$r(iy) = \frac{1 + \dots + \alpha_q (i)^q y^q}{1 + \dots + b_q (i)^q y^q}$$

όμως $|r(iy)| \leq 1 \quad \forall\, y \in \mathbb{R} \implies \left| \dfrac{\alpha_q}{b_q} \right| \leq 1$

$\lim\limits_{|z| \to \infty} |r(z)| = \left| \dfrac{\alpha_q}{b_q} \right| \leq 1$ Άρα έχουμε το αποτέλεσμα από αρχή μεγίστου για αναλυτικές συναρτήσεις

Ικανή συνθήκη για το (iii) (ή το (i), αφού είναι ισοδύναμα)

Αν μ_i οι ιδιοτιμές του A και $Re\, \mu_i > 0 \quad 1 \leq i \leq q$

τότε $(I - zA)$ είναι αντιστρέψιμος $\forall\, z \in \mathbb{C} : Re\, z \leq 0$.

Αν ο $(I - zA)$ δεν ήταν αντιστρέψιμος για κάποιο $z \in \mathbb{C} : Re\, z \leq 0$, $\exists$ ιδιοτιμή μ του A τέτοια ώστε $1 - \mu z = 0$ για αυτό το z

τότε $\mu = \dfrac{1}{z}$. $Re\, \mu = \dfrac{Re\, z}{|z|^2} \leq 0$ άτοπο

Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 16/9/2019

Θεώρημα: Έστω το σύστημα Δ.Ε

$(*)$ $y' = My + f(t)$, $y(0)=y_0$, $t\geq 0$ $y \in \mathbb{R}^m$

όπου M πραγματικός, συμμετρικός $m\times m$ πίνακας, με ιδιοτιμές $\lambda_i \leq 0$ και f συνεχής.

Έστω μια μέθοδος RK τέτοια ώστε $|r(x)|\leq 1$ για $x\leq 0$. ← A_0 - ευστάθεια

Τότε αν y^n, z^n ακολουθίες που πληρούν την μέθοδο RK για το $(*)$, θα έχουμε

$\|y^n - z^n\| \leq \|y_0 - z_0\|$ $\forall n = 0,1,2,\ldots$

όπου $\|\cdot\|$: Ευκλείδεια νόρμα του $\mathbb{R}^m$ (η οποιαδήποτε νόρμα που προέρχεται από εσωτερικό γινόμενο)

Παρατήρηση:

Ισχύει για γενικούς πραγματικούς πίνακες M με $Re\lambda_i \leq 0$ και A-ευσταθής μέθοδο $|r(z)|\leq 1$ $\forall z \in Re z \leq 0$

Παρατήρηση: Αν $y(t)$, $z(t)$ λύσεις του $(*)$, $y(0)=y$, $z(0)=z_0$.

Τότε $\|y(t)-z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\|$ $\forall t\geq 0$

$$\left.\begin{array}{l} y' = My + f(t) \\ z' = Mz + f(t) \end{array}\right\} \text{"}-\text{"} \quad y'-z' = M(y-z),\ t\geq 0$$

$$w = y - z$$

$w'(t) = M\cdot w(t)$ $t\geq 0$

$w(0) = y_0 - z_0$

$(\cdot,\cdot)$ ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^m$

$\underset{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2}{\underset{\parallel}{(w',w)}} = (Mw, w)$

M συμμετρικός, πραγματικός, άρα υπάρχει ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων του M στο $\mathbb{R}^m$

$\exists \{v_i\}_{i=1}^m$ $Mv_i = \lambda_i v_i$ $1\leq i\leq m$

$(v_i, v_j) = \delta_{ij}$

$w = \sum_{i=1}^m c_i v_i$

$Mw = \sum_{i=1}^m c_i M v_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i v_i$ ← (φασματική παράσταση)

$(Mw, w) = \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i c_i v_i, \sum_{j=1}^m c_j v_j\right) = \sum_{i,j=1}^m \lambda_i c_i c_j (v_i, v_j) = \sum_{i=1}^m \lambda_i c_i^2 \leq 0$

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 \leq 0$

$\|w(t)\|^2$ φθινει $\longrightarrow$ $\|w(t)\| \leq \|w(0)\|$

δηλαδη

$\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(0) - z(0)\|$