Μάθημα 12º Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 6/5/2019

Θεώρημα: Έστω το σύστημα

$(*)\ y' = My + f(t), \quad t \geq 0$

$y(t) \in \mathbb{R}^m$ η λύση του.

M πραγματικός, συμμετρικός $m \times m$ πίνακας, με ιδιοτιμές $\lambda_i = \lambda_i(M) \leq 0$ και f συνεχής.

Έστω μια μέθοδος RK τέτοια ώστε $|r(x)| \leq 1 \quad \forall x \leq 0$

$(y' = \lambda y, \ y^{n+1} = r(h\lambda) y^n)$ (A_0 - ευσταθής)

Και έστω y^n, z^n ακολουθίες που παράγονται από την RK για το $(*)$ με αρχικές συνθήκες y^0, z^0.

$y^n, z^n \in \mathbb{R}^m$

Τότε $\|y^n - z^n\| \leq \|y^0 - z^0\| \quad \forall n$, $\|\cdot\| =$ η ευκλείδεια νόρμα του $\mathbb{R}^m$

Απόδειξη:

(Το θεώρημα ισχύει για M όχι συμμετρικό, $Re\, \lambda_i \leq 0$, $|r(z)| \leq 1 \ \forall Re\, z \leq 0$)

Αν $y(t), z(t)$ λύσεις του $(*)$, $w = y - z$, $w' = Mw \quad t \geq 0$, $w(0) = y(0) - z(0)$

$(w', w) = (Mw, w)$

$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2$ (= (w',w))

$\|w\|^2 = (w(t), w(t))$

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2 = \frac{d}{dt}(w(t), w(t)) = (w'(t), w(t)) + (w(t), w'(t)) = 2(w', w)$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w\|^2 = (Mw, w)$$

M συμμετρικός πραγματικός : u_i = ιδιοδιάνυσμα του M, $Mu_i = \lambda_i u_i \quad 1 \leq i \leq m$

$(u_i, u_j) = \delta_{ij}$

$v \in \mathbb{R}^m \rightarrow v = \sum_{i=1}^m c_i u_i \qquad (v, u_j) = c_j$

$\rightarrow v = \sum_{i=1}^m (v, u_i) u_i \rightarrow M \cdot v = \sum_{i=1}^m (v, u_i) M u_i = \sum_{i=1}^m \lambda_i (v, u_i) u_i$

$(\|v\|^2 = (\sum_i (v,u_i)u_i, \sum_j (v,u_j)u_j) = \sum_{i,j} (v,u_i)(v,u_j)(u_i,u_j) = \sum_{i=1}^m (v,u_i)^2$

$w(t) = \sum_{i=1}^m (w(t), u_i) u_i \longrightarrow (Mw, w) = (\sum_i \lambda_i (w,u_i) u_i, \sum_j (w,u_j) u_j) =$

$$= \sum_{i,j} \lambda_i (w, u_i) \lambda_j (w, u_j)(u_i, u_j) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (w, u_i)^2 \leq 0$$

Άρα $\frac{d}{dt} \|w\|^2 \leq 0 \quad \forall \ t \geq 0 \quad \rightarrow \|w(t)\|$ φθίνουσα $t \geq 0$

άρα $\|w(t)\| \leq \|w(0)\| \quad \Rightarrow \quad \|y(t) - z(t)\| \leq \|y(0) - z(0)\|$

$$\|y^n - z^n\| \leq \|y^0 - z^0\|$$

$y^n : \quad y^0$

$$y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} (M y^{n,j} + f(t^{n,j})) \qquad t^{n,i} = t^n + \tau_i h$$

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} b_j (M y^{n,j} + f(t^{n,j}))$$

$z^n : \quad z^0$

$$z^{n,i} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} (M z^{n,j} + f(t^{n,j})) \qquad , t^{n,i} = t^n + \tau_i h$$

$$z^{n+1} = z^n + h \sum_{j=1}^{q} b_j (M z^{n,j} + f(t^{n,j}))$$

$$\begin{cases} y^{n,i} - z^{n,i} = y^n - z^n + h \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} M (y^{n,j} - z^{n,j}) & 1 \leq i \leq q \\ y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + h \sum_{j=1}^{q} b_j M (y^{n,j} - z^{n,j}) \end{cases}$$

$$v = \sum_{i=1}^{m} (v, u_i) u_i \quad , M v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v, u_i) u_i , \quad M^2 v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 (v, u_i) u_i$$

$$M^k v = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k (v, u_i) u_i$$

p πολυώνυμο.

$$p(M) v = \sum_{i=1}^{m} p(\lambda_i)(v, u_i) u_i \qquad M^{-1} u_i = \frac{1}{\lambda_i} u_i \qquad \lambda_i \neq 0.$$

$$(\alpha I + B M)^{-1} u_i = \frac{1}{\underbrace{\alpha + B\lambda_i}_{\neq 0}} u_i$$

ρητή συνάρτηση του M

$$r(M) = \sum_{i=1}^{m} r(\lambda_i)(v, u_i) u_i \qquad \lambda_i \leq 0$$

Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 6/5/2019

Θέλω να καταλήξω στο $y^{n+1} - z^{n+1} = r(hM)(y^n - z^n)$, $r(hM)v = \sum_{i=1}^{m} r(h\lambda_i)(v,u_i)u_i$

$$y^1 - z^1 = r(hM)(y^0 - z^0)$$
$$y^2 - z^2 = r^2(hM)(y^0 - z^0)$$
$$\vdots$$
$$y^n - z^n = r^n(hM)(y^0 - z^0) \Rightarrow \|y^n - z^n\| \le \|r^n(hM)\|\,\|y^0 - z^0\|$$
$$\Rightarrow \|y^n - z^n\| \le \|r(hM)\|^n\,\|y^0 - z^0\|$$

Άρα μένει να δείξω $\|r(hM)\| \le 1$

$$\Phi(M)v = \sum_{i=1}^{m} \Phi(\lambda_i)(v,u_i)u_i \rightsquigarrow \|\Phi(M)v\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \Phi(\lambda_i)^2(u,u_i)^2 \le \max(\Phi(\lambda_i))^2 \cdot \|v\|^2$$

$$\|\Phi(M)v\| \le \max_{1\le i\le m} |\Phi(\lambda_i)| \cdot \|v\|$$

$$\|\Phi(M)\| = \max_{\substack{u\in\mathbb{R}^m \\ u\neq 0}} \frac{\|\Phi(M)v\|}{\|v\|} \le \max_{1\le i\le m} |\Phi(\lambda_i)|$$

Παρατήρηση: $\|\Phi(M)\| = \max_{1\le i\le m} |\Phi(\lambda_i)|$

Άρα $\|r(hM)\| = \max_{1\le i\le m} |r(h\lambda_i)| \le 1$, $\lambda_i \le 0$

~ . ~

Euler : $|r(x)| \le 1 \Leftrightarrow x \in [-2,0]$

άμεση μέθοδος $|r(x)| \le 1 \Leftrightarrow x \in [-\alpha, 0]$, $\alpha > 0$

$$\Downarrow$$

$$\|r(hM)\| = \max_{1\le i\le m} |r(h\lambda_i)| \le 1 \rightsquigarrow \text{αν } h\lambda_i \in [-\alpha, 0].$$

$$\rightsquigarrow h\lambda_{min} \ge -\alpha \rightsquigarrow h \le -\alpha/\lambda_{min} \rightsquigarrow h \le \alpha/|\lambda_s|$$

$y \in \mathbb{R}^m$ $y' = f(t,y)$, $t \ge 0$

$f \in \mathbb{R}^m$ Υποθέτουμε ότι $(f(t,y) - f(t,z), y-z) \le 0$ $\forall t \ge 0, \forall y,z \in \mathbb{R}^m$

$y' = f(t,y)$

$z' = f(t,y)$ $\rightsquigarrow$ $w = y - z$ $\rightsquigarrow$ $w' = f(t,y) - f(t,z)$

$(w', w) = (f(t,y) - f(t,z), y-z) \leq 0$

άρα καταλήγουμε $\|y(t) - z(t)\| \leq \|y(0) - z(0)\|$

Μάθημα 13ο: Εφ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 7/5/2019

Θεωρούμε το μη γραμμικό πρόβλημα

$$(*)\begin{cases} y' = f(t,y) \quad , t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \qquad y \in \mathbb{R}^m \\ \text{Μια ιδιότητα αποδοσης} \\ (f(t,z) - f(t,w), \ z-w) \leq 0 \qquad \forall t \geq 0 \quad \forall z,w \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Αν y, z λύσεις της Δ.Ε

$y - z$ $\qquad \frac{d}{dt}\|y-z\|^2 \leq 0 \quad t \geq 0$

$\|y-z\|$ όχι αύξουσα

π.χ. $\|y(t^{n+1}) - z(t^{n+1})\| \leq \|y(t^n) - z(t^n)\|$

Ορισμός: Μια μέθοδος λέγεται B-ευσταθής αν, όταν εφαρμοσθεί στο (*) δίνει προσεγγίσεις y^n, z^n τέτοιες ώστε
$\|y^{n+1} - z^{n}\| \leq \|y^n - z^n\| \quad \forall n$

Πρόταση: B-ευστάθεια $\Rightarrow$ A-ευστάθεια

Απόδειξη:

Η A-ευστάθεια είναι αν εφαρμόσουμε στην

$y' = \lambda y \quad \lambda \in \mathbb{C}$ δίνει $|y^{n+1}| \leq |y^n|$ $\quad \left(\Leftrightarrow y^{n+1} = r(h\lambda)\, y^n \right.$
$y(0) = 1 \quad Re\lambda \leq 0$ $\quad \left. |y^{n+1}| = |r(h\lambda)|\,|y^n| \right)$

Το από πάνω πρόβλημα μπορεί να γραφεί σαν "πραγματικό" σύστημα

$\lambda = \alpha + i\beta \quad , \alpha \leq 0$

$y = y_1 + i y_2 \quad , y_i \in \mathbb{R}$

$(y_1 + iy_2)' = (\alpha + i\beta)(y_1 + iy_2)$

$y_1' + iy_2' = (\alpha y_1 - \beta y_2) + i(\alpha y_2 + \beta y_1)$ άρα καταλήγω στο

$$(**)\begin{cases} y_1' = \alpha y_1 - \beta y_2 \qquad y_1(0) = 1 \\ y_2' = \beta y_1 + \alpha y_2 \qquad y_2(0) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

πρέπει να δείξω ότι αν y, z λύσεις τότε $(f(t,y) - f(t,z), y-z) \leq 0$

$f(t,y) = My \qquad , y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

δηλαδή πρέπει να δείξω

$(My - Mz, y-z) \leq 0 \quad \forall\, y, z \in \mathbb{R}^2 \qquad (\cdot,\cdot)$ ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^2$

$(Mx, x) \overset{?}{\leq} 0 \; \forall\, x \in \mathbb{R}^2, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \qquad . \quad Mx = \begin{pmatrix} \alpha x_1 - \beta x_2 \\ \beta x_1 + \alpha x_2 \end{pmatrix}$

$(Mx, x) = (\alpha x_1 - \beta x_2) x_1 + (\beta x_1 + \alpha x_2) x_2 = \alpha (x_1^2 + x^2) \leq 0 \quad \forall x \quad (\overset{\text{αφού}}{\alpha \leq 0})$

Άρα έστω μια μέθοδος B-ευσταθής. Τότε εφαρμοζόμενη στο (**) θα δώσει προσεγγίσεις y^n, z^n τέτοιες ώστε $\| y^{n+1} - z^{n+1} \| \leq \| y^n + z^n \|$

$z^n = 0 \quad$ άρα $\quad \| y^{n+1} \| \leq \| y^n \|$

$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \left\| \begin{pmatrix} y_1^{n+1} \\ y_2^{n+1} \end{pmatrix} \right\| \leq \left\| \begin{pmatrix} y_1^n \\ y_2^n \end{pmatrix} \right\| \Leftrightarrow \sqrt{(y_1^{n+1})^2 + (y_2^{n+1})^2} \leq \sqrt{(y_1^n)^2 + (y_2^n)^2}$

όμως $\quad w = y_1 + i y_2 \longrightarrow w' = \lambda w \quad \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$

$\qquad |w^{n+1}| \leq |w^n|$

Πρόταση. Έστω ο πίνακας $m_{ij} = b_i \alpha_{ij} + b_j \alpha_{ji} - b_i b_j \quad 1 \leq i,j \leq q$ (συμμετρικός)

Αν $b_i \geq 0$ και $x^T (m_{ij}) x \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^q \qquad \begin{array}{c|c} \alpha_{ij} & c_i \\ \hline & b_i \end{array}$

τότε η μέθοδος RK είναι B-ευσταθής.

Απόδειξη:

Έστω το πρόβλημα $\qquad \begin{cases} y' = f(t,y) & t \geq 0 \quad y \in \mathbb{R}^d \\ y(0) = y_0 \end{cases}$

που πληροί την ιδιότητα $(f(t,y) - f(t,z), y-z) \leq 0 \quad \forall\, t \geq 0, \forall\, y, z \in \mathbb{R}^d$

Γράφω τη μέθοδό μου

$$y^{n,i} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} f(t^{n,j}, y^{n,j}) \qquad 1 \leq i \leq q \qquad \text{όμοια για την } z$$

$$y^{n+1} = y^n + h \sum_{j=1}^{q} b_j f(t^{n,j}, y^{n,j}) \qquad t^{n,j} = t^n + c_i h$$

ΕΘ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 7/5/2019

$$y^{n,i} - z^{n,i} = y^n - z^n + \sum_{j=1}^{q} \alpha_{ij} \underbrace{h\left(f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j})\right)}_{\phi_j \in \mathbb{R}^d} \qquad 1 \le i \le q$$

$$y^{n+1} - z^{n+1} = y^n - z^n + \sum_{j=1}^{q} b_j \phi_j$$

πρέπει να δείξω ότι

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\|$$

$$\|y^{n+1} - z^{n+1}\|^2 = (y^{n+1} - z^{n+1}, y^{n+1} - z^{n+1}) = (y^n - z^n + \sum_{j=1}^{q} b_j \phi_j, y^n - z^n + \sum_{i=1}^{q} b_i \phi_i)$$

$$= \|y^n - z^n\| + 2\left(\sum_{j=1}^{q} b_j \phi_j, y^n - z^n\right) + \sum_{i,j} b_i b_j (\varphi_i, \varphi_j) \qquad (\bullet)$$

$$2\left(\sum_{j=1}^{q} b_j \phi_j, y^n - z^n\right) = 2\sum_j b_j (\varphi_j, y^n - z^n) = 2\sum_j b_j \left(\varphi_j, y^{n,j} - z^{n,j} - \sum_k \alpha_{jk}\phi_k\right) =$$

$$= 2\sum_j b_j (\varphi_j, y^{n,j} - z^{n,j}) - 2\sum_{j,k} b_j \alpha_{jk} (\phi_j, \phi_k)$$

$$= \underbrace{2\sum_j b_j\, h\left(f(t^{n,j}, y^{n,j}) - f(t^{n,j}, z^{n,j}), y^{n,j} - z^{n,j}\right)}_{\le 0} - 2\sum_{j,i} b_j \alpha_{ji} (\phi_j, \phi_i)$$

$$(\bullet) \le \|y^n - z^n\| - 2\sum_{j,i} b_j \alpha_{ij} (\phi_j, \phi_i) + \sum_{i,j} b_i b_j (\phi_i, \phi_j) \overset{\text{από } (**)}{\le} \|y^n - z^n\|$$

$$-\sum_{i,j} \left[b_i \alpha_{ij} (\phi_i, \phi_j) + b_j \alpha_{ji} (\phi_i, \phi_j) - b_i b_j (\phi_i \phi_j)\right] =$$

$$= -\sum_{i,j} [b_i \alpha_{ij} + b_j \alpha_{ji} - b_i b_j] (\phi_i, \phi_j) = -\sum_{i,j} m_{ij} (\phi_i, \phi_j) \qquad (**)$$

Έστω $\{v_j\}_{j=1}^{d}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^d$

$$\mathbb{R}^d \ni \phi_i = \sum_{k=1}^{d} x_k^{(i)} v_k, \qquad \mathbb{R}^d \ni \phi_j = \sum_{\ell=1}^{d} x_\ell^{(j)} v_\ell$$

$$(\phi_i, \phi_j) = \left(\sum_k x_k^{(i)} v_k, \sum_\ell x_\ell^{(j)} v_j\right) = \sum_{k,\ell} x_k^{(i)} x_\ell^{(j)} (v_k, v_\ell) = \sum_k x_k^{(i)} x_k^{(j)}$$

$$(**) = -\sum_{i,j} m_{ij} \sum_k x_k^{(i)} x_k^{(j)} = -\sum_{k=1}^{d} \underbrace{\left(\sum_{i,j=1}^{q} x_k^{(i)} m_{ij} x_k^{(j)}\right)}_{\ge 0} \le 0$$

Επομένως $\|y^{n+1} - z^{n+1}\| \le \|y^n - z^n\|$

Παραδείγματα

1 $q=1$ $\begin{array}{c|c} \lambda & \lambda \\ \hline & 1 \end{array}$ $\rightsquigarrow$ $m = 1\lambda + 1\cdot\lambda - 1 = 2\lambda - 1 \geq 0$

πρέπει $\Rightarrow \lambda \geq 1/2$.

Άρα η πεπλεγμένη του Euler και η πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου είναι B- ευσταθείς

2 Gauss - Legandre κάθε τάξης είναι B-ευσταθείς και έχουν $m_{ij} = 0$ (οι μέθοδοι με $m_{ij}=0$ λέγονται συντηρητικές)

Ερώτημα: Υπάρχει A- ευσταθής μέθοδος που δεν είναι B- ευσταθής?

Ναι π.χ η μέθοδος του τραπεζίου $\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \\ \hline 1/2 & 1/2 & \end{array}$

$m_{11} = \frac{1}{2}0 + 0\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = -1/4$

$m_{12} = m_{21} = \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0$

$m_{22} = \frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 1/4$

$\Rightarrow m_{ij} = \begin{pmatrix} -1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ όχι $x^T(m_{ij})x \geq 0$