Μάθημα 14ο Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά II 13/5/2019

Πολυβηματικές Μέθοδοι

$y^{n-s}, \dots, y^{n-2}, y^{n-1}, y^{n} \longrightarrow y^{n+1}$

$$\begin{cases} y' = f(t,y), & \alpha \le t \le \beta \\ y(\alpha) = y_0 & y(t) \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

Παραδείγματα Πολυβηματικών Μεθόδων

(α) Με αναπτύγματα Taylor

$y(t)$ η λύση   πάω να υπολογίσω το $y(t+h)$

$y(t+h) = y(t) + hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + \underbrace{O(h^3)}_{\frac{h^3}{3!}y'''(\theta_t)}$, $\theta_t \in [t, t+h]$

αν αναπτύξω το $y(t-h)$

$y(t-h) = y(t) - hy'(t) + \frac{h^2}{2}y''(t) + \underbrace{O(h^3)}_{\frac{h^3}{3!}y'''(\eta_t)}$, $\eta_t \in [t-h, t]$

αφαιρώ κατά μέλη:

$y(t+h) - y(t-h) = 2hy'(t) + O(h^3) \implies$

$y(t+h) - y(t-h) = 2h f(t,y) + O(h^3)$

Η αριθμητική μέθοδος που προκύπτει

για $t^n = \alpha + nh$, $n = 0, 1, \dots, N$, $Nh = \beta - \alpha$

$y(t^n) \cong y^n$

$y^{n+1} - y^{n-1} = 2hf(t^n, y^n), n \ge 1 \leftarrow$ Μια 2-βηματική μέθοδος

Πρέπει να ξέρω y^0, y^1

Το y^0 το ξέρω $y^0 = y(\alpha) = y_0$

Για το y^1 μπορώ να το υπολογίσω με μια RK.

πχ Euler $y^1 = y^0 + hf(t^0, y^0)$

Συμβολισμός: Θα γράφω τη μέθοδο ως εξής

$$\begin{cases} y^{n+2} - y^{n} = 2h f(t^{n+1}, y^{n+1}), & n = 0, 1, \dots, N-2 \\ y^0, y^1 \text{ δεδομένα.} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Η μέθοδος είναι άμεση, δεν χρειάζεται να λύσω κάποιο σύστημα (β) Με αριθμητική ολοκλήρωση.

$$y(t^{n+2}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+2}} y'(s)\,ds = \int_{t^n}^{t^{n+2}} \underbrace{f(s, y(s))}_{\varphi(s)}\,ds$$

Προσεγγίζω με μέθοδο αριθμητικής ολοκλήρωσης
(πρέπει να χρησιμοποιεί t^n, t^{n+1}, t^{n+2})

Πχ Simpson $\quad y(t^{n+2}) - y(t^n) \cong \frac{2h}{6}\left(f(t^{n+2}, y(t^{n+2})) + 4f(t^{n+1}, y(t^{n+1})) + f(t^n, y(t^n))\right)$

Μέθοδος του Simpson

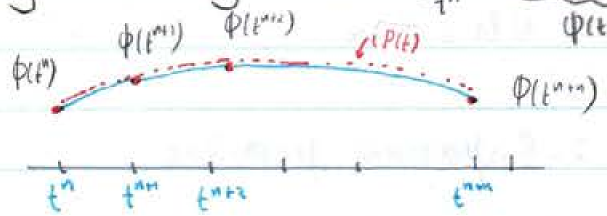
$$\begin{cases} y^{n+2} - y^n = \frac{h}{3}\left(f^{n+2} + 4f^{n+1} + f^n\right) & , \ f^j = f(t^j, y^j) \\ y^0, y^1 \longleftarrow \text{δίδονται} & 2\text{-βηματική} \end{cases}$$

από RK 3ης τάξης τουλάχιστον

Πεπλεγμένη μέθοδος, πρέπει να λύσω ένα μη-γραμμικό σύστημα

(γ) Με πολυωνυμική παρεμβολή και ολοκλήρωση

$$y(t^{n+k}) - y(t^n) = \int_{t^n}^{t^{n+k}} \underbrace{f(t, y(t))}_{\varphi(t)}\,dt$$



$\exists !\ p \in \mathbb{P}_k$ παρεμβολή Lagrange
$p(t^{n+j}) = \varphi(t^{n+j}) \quad j = 0, 1, \ldots k$

Έτσι έχω

$$y(t^{n+k}) - y(t^n) \cong \int_{t^n}^{t^{n+k}} p(t)\,dt$$

Το $p(t)$ χρειάζεται τις τιμές της $f(t^{n+j}, y(t^{n+j}))$ $\quad j = 0, 1, \ldots, k$.

Ορισμός

Δίδονται σταθερές $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=0}^{k}$, $\alpha_k = 1 \quad |\alpha|_0 + |\beta_0| \neq 0$

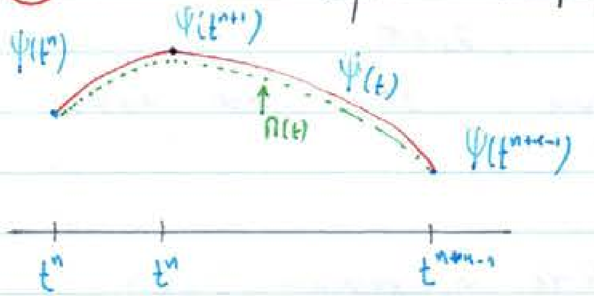
Η k-βηματική μέθοδος που αντιστοιχεί στις σταθερές είναι:

$$\begin{cases} \alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \ldots + \alpha_0 y^n = h(\beta_k f^{n+k} + \ldots + \beta_0 f^n) \\ y^n, \ldots, y^{n+k} \longrightarrow y^{n+k} \\ y^0, y^1, \ldots, y^{n-1} \ \text{δεδομένα} \end{cases}$$

Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 13/5/2019

Αν $b_k = 0$ η μέθοδος λέγεται άμεση και λύνεται με απλή αντικατάσταση.
Αν $b_k \neq 0$ λέγεται πεπλεγμένη και πρέπει να λύσω μια μη γραμμική εξίσωση $Lh|b_k| < 1$

8 Με πολυωνυμική παρεμβολή και παραγώγιση.



$\exists!\ \Pi \in \mathbb{P}_{k-1}$

$\Pi(t^{n+j}) = \Psi(t^{n+j}) \quad j = 0, 1, \dots, k-1$

Παραγωγίζω το $\Pi(t)$ $\quad \Pi'(t) \cong \psi'(t)$

$\psi'(t^{n+k}) \cong \Pi'(t^{n+k})$

$y'(t) = f(t, y(t))$

$y'(t^{n+k}) = \underbrace{f(t^{n+k}, y(t^{n+k}))}_{\longrightarrow f^{n+k}}$

$y(t) = \psi(t) \cong \Pi(t)$

$y'(t^{n+k}) \cong \Pi'(t^{n+k}) \longrightarrow$ Εξαρτάται μόνο από τα $t^{n+j}, y(t^{n+j})$, $j = 0, 1, \dots, k-1$

Οι μέθοδοι αυτές λέγονται
Μέθοδοι ανάδρομων ή οπισθοδρομικών διαφορών (BDF)

$\alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y^n = h\, b_{n+k} f^{n+k}$

Παραδείγματα:
- $y^{n+1} - y^n = h f^{n+1}$ $\quad k=1$ (πεπλεγμένη Euler)
- $y^{n+2} - \frac{4}{3} y^{n+1} + \frac{1}{3} y^n = \frac{2}{3} f^{n+2}$

Εξίσωση Διαφορών (ομογενής)

$\alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y^n = 0 \quad . \ \alpha_k \neq 0$

$y^0, y^1, \dots, y^{n+k-1}$ δεδομένα $\quad y^n \in \mathbb{R}$

$y^n = ?$

Σε αναλογία με διαφορικές εξισώσεις

$\overset{\swarrow \text{δείκτης}}{}$ $\overset{\swarrow \text{δύναμη}}{}$

Ψάχνω λύσης $\to y^n = z^n$, $z \in \mathbb{C}$

$\alpha_k z^{n+k} + \dots + \alpha_0 z^n = 0$

Αν $z \neq 0 \to \alpha_k z^k + \dots + \alpha_0 = 0$

άρα αρκεί το z να είναι λύση του πολυωνύμου

$p(z) = \alpha_k z^k + \dots + \alpha_0 \in \mathbb{P}_k$

Έστω $z_1, z_2, \dots, z_k$ οι ρίζες του $p(z)$, $z_i \in \mathbb{C}$

κάθε z_i^n λύση της εξίσωσης διαφορών όπως και κάθε γραμμικός συνδυασμός $c_1 z_1^n + c_2 z_2^n$

Πρόταση: Έστω ότι $z_i \neq z_j$ για $i \neq j$. Τότε η γενική λύση της εξίσωσης διαφορών είναι:

$y^n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n + \dots + c_k z_k^n$, $c_i \in \mathbb{R}$

(Τα c_i, $1 \le i \le k$ τα βρίσκουμε από τις αρχικές συνθήκες)

$c_1 z_1^0 + c_2 z_2^0 + \dots + c_k z_k^0 = y^0$

$c_1 z_1^1 + c_2 z_2^1 + \dots + c_k z_k^1 = y^1$ λύνω το σύστημα.

$\vdots$

$c_1 z^{k-1} + c_2 z_2^{k-1} + \dots + c_k z_k^{k-1} = y^{k-1}$

Πολλαπλές ρίζες

Αν μια ρίζα z_1 είναι διπλή

$z_1^n, n z_1^n, z_2^n, \dots, z_k^n$

Αν μια ρίζα z_1 είναι τριπλή

$z_1^n, n z_1^n, n(n-1) z_1^n, \dots$

$y^n = c_1 p_1(n) z_1^n + \dots + c_j p_j(n) z_j^n$ $z_1, \dots, z_j$ διαφορετικές

Ερώτημα: $\exists$ C σταθερά τέτοια ώστε $|y^n| \le C$ $n = 0, 1, \dots$ για οποιαδήποτε επιλογή αρχικών $y^0, \dots, y^{k-1}$?

Ναι, αν ισχύει συνθήκη των ριζών

Το πολυώνυμο $p(z)$ με ρίζες $z_1, \dots, z_k$ πληροί την συνθήκη των ριζών αν:

Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ

13/5/2019

α) αν μια ρίζα z_k είναι απλή πρέπει $|z_k| \leq 1$
β) αν μια ρίζα z_ℓ είναι πολλαπλή πρέπει $|z_\ell| < 1$

Ορισμός. Μια πολυβηματική μέθοδος $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=0}^{k}$ λέγεται ευσταθής αν όταν εφαρμοσθεί στην διαφορική εξίσωση $y' = 0$ δίνει φραγμένες λύσεις $\forall$ αρχική συνθήκη $(y_0, \dots, y_{k-1})$

$$\Updownarrow$$

Η εξίσωση διαφορών $\alpha_k y^{n+k} + \dots + \alpha_0 y^0 = 0$ έχει φραγμένες λύσεις

$$\Updownarrow$$

$p(z) = \alpha_k z^k + \dots + \alpha_0$ πληροί συνθήκη ριζών

Παραδείγματα: (1) Euler $\quad y^{n+1} - y^n = h \cdot f^n$

$p(z) = z - 1 \longrightarrow z = 1$ ρίζα, πληροί την συνθήκη
άρα ευσταθής

(2) Simpson. $\quad y^{n+2} - y^n = \frac{h}{3}(f^{n+2} + \dots) \longrightarrow p(z) = z^2 - 1 \longrightarrow z_1 = 1, z_2 = -1$
άρα ευσταθής

(3) Ανάδρομων διαφορών $k = 2$

$$y^{n+2} - \frac{4}{3} y^{n+1} + \frac{1}{3} y^n = \frac{2}{3} h f^{n+2} \longrightarrow p(z) = z^2 - \frac{4}{3} z + \frac{1}{3}$$

$p(z) = 0 \longrightarrow z_1 = 1 \quad , z_2 = 1/3 \qquad$ Άρα ευσταθής

Παρατήρηση: Μπορεί να δειχθεί ότι οι μέθοδοι ανάδρομων διαφορών είναι ευσταθείς $\Longleftrightarrow 1 \leq k \leq 6$