Μάθημα 15ο   Εφ. Υπολογιστικά Μαθηματικά II   14/5/2019

Θεωρούμε την πολυβηματική μέθοδο

$$\begin{cases} \alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y^n = h(b_k f^{n+k} + \dots + b_0 f^n) & n = 0,1,\dots,N-k \\ f^j = f(t^j, y^j) \\ y^0, \underbrace{y^1, \dots, y^{k-1}}_{RK} \end{cases}$$

δεδομένο (y^0)

1. Ευστάθεια

$$\begin{cases} y' = 0 \\ y(\alpha) = y_0 \end{cases} \longrightarrow \quad \alpha_k y^{n+k} + \alpha_{k-1} y^{n+k-1} + \dots + \alpha_0 y^n = 0 \quad (\text{εξίσωση διαφορών})$$

$$y^0, y^1, \dots, y^{k-1}$$

$y^n = c_1 z_1^n + \dots + c_k z_k^n$ η λύση της ε.δ. $z_i \neq z_j,\ i \neq j$

z_i ρίζες του $p(z) = \alpha_k z^k + \dots + \alpha_0$

(αν έχω πολλαπλές ρίζες π.χ z_1 διπλή $y^n = c_1 z_1^n + c_2 n z_1^n + \dots$

Ευστάθεια : $\exists\, c : |y^n| \leq c \quad \forall n$

$\Updownarrow$

$p(z)$: πληροί την συνθήκη των ριζών.

Δηλαδή

- Αν z_i απλή ρίζα $\leadsto |z_i| \leq 1$
- Αν z_j πολλαπλή ρίζα $\leadsto |z_j| < 1$

Παράδειγμα: $y^{n+2} - 2y^{n+1} + y^n = h(\dots)$

$p(z) = z^2 - 2z + 1 \quad \leadsto \quad z = 1$ διπλή ασταθής

Αν μια μέθοδο είναι ασταθής δεν μπορώ να τη χρησιμοποιήσω γιατί αποκλίνει.

Έστω ότι έχω ασταθή μέθοδο, την εφαρμόζω στο

$y' = 0 \quad t \geq 0$

$y(\alpha) = y_0 \qquad\qquad z_i \neq z_j$ για $i \neq j$

$y^n = c_1 z_1^n + \dots + c_k z_k^n$

Έστω $|z_1| > 1$ και $|z_i| \leq 1 \quad i \geq 2$

Για $n \to \infty$ το $\sum_{j=2}^{k} c_j z_j^n$ θα είναι φραγμένο και $c_1 z_1^n \to \infty$

Τα c_i τα βρίσκουμε από τα y_i δεδομένα λύνοντας ένα σύστημα

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_k \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_k^2 \\ \vdots & & & \\ z_1^{k-1} & z_2^{k-1} & \dots & z_k^{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{k-1} \end{pmatrix}$$

2. Τάξη ακρίβειας p

δ^n = Τοπικό σφάλμα $= O(h^{p+1})$

$$\delta^n = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j y(t^{n+j}) - h \sum_{j=0}^{k} b_j f(t^{n+j}, y(t^{n+j})) \quad , f(t, y(t)) = y'(t)$$

$$\Rightarrow \quad \delta^n = \sum_{j=0}^{k} \{ \alpha_j \cdot y(t^{n+j}) - h\, b_j\, y'(t^{n+j}) \} \quad , t^{n+j} = t^n + jh \quad , 0 \le j \le k$$

Κάνω τα αναπτύγματα Taylor

$$y(t^{n+j}) = y(t^n) + jhy'(t^n) + \frac{j^2 h^2}{2!} y''(t^n) + \dots$$

$$h \cdot y'(t^{n+j}) = h y'(t^n) + jh^2 y''(t^n) + \frac{j^2 h^3}{2} y'''(t^n) + \dots$$

$$\text{Άρα } \delta^n = \overbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} \alpha_j \right)}^{C_0} \cdot y(t^n) + \overbrace{\left(\sum_{j=0}^{k} (j\alpha_j - b_j) \right)}^{C_1} \cdot h y'(t^n) + \dots + C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(t^n) + \dots$$

$$\left. \begin{aligned} C_0 &= \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \\ C_1 &= \sum_{j=0}^{k} (j\alpha_j - b_j) \\ C_2 &= \dots \end{aligned} \right\} \text{ Υπάρχουν τύποι για τα } C_j$$

Ορισμός: Λέμε ότι η μέθοδος έχει τάξη ακρίβειας p όταν $C_0 = C_1 = \dots = C_p = 0$ και $C_{p+1} \neq 0$. Στη περίπτωση αυτή

$$\delta^n = C_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(\xi^n) \quad , \xi^n \in [t^n, t^{n+k}]$$

Παραδείγματα:

1. Euler $\quad y^{n+1} - y^n = h f^n$

$$\delta^n = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h f(t^n, y(t^n)) = y(t^{n+1}) - y(t^n) - h \cdot y'(t^n)$$

$$y(t^{n+1}) = y(t^n) + h y'(t^n) + \frac{h^2}{2} y''(t^n) + \dots$$

$$-y(t^n) = -y(t^n)$$

$$-hy'(t^n) = -h y'(t^n)$$

$$\Rightarrow \delta^n = \frac{h^2}{2} y''(\xi^n) \longrightarrow p = 1$$

Εφ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ

14/5/2019

2) $y^{n+2} - y^n = 2hf^{n+1}$ $\quad p(z) = z^2 - 1 \to z_1 = 1,\ z_2 = -1 \to$ Ευσταθής

$$\delta^n = y(t^{n+2}) - y(t^n) - 2hy'(t^{n+1})$$

αναπτύσω κάθε ένα

$$y(t^{n+2}) = y(t^n) + 2hy'(t^n) + 2h^2y''(t^n) + \tfrac{8}{6}h^3y'''(t^n) + \dots$$

$$-y(t^n) = -y(t^n)$$

$$-2hy'(t^{n+1}) = -2hy'(t^n) - 2h^2y''(t^n) - h^3y'''(t^n) + \dots$$

$$\delta^n = \tfrac{1}{3}h^3y'''(t^n) + O(h^4) \longrightarrow p = 2$$

$$\delta^n = \tfrac{8}{6}h^3y'''(\theta^n) - h^3y'''(\gamma^n) \longrightarrow |\delta^n| \le c\, h^3 \max_t |y'''(t)|$$

Παρατηρήσεις: 1) Η μέθοδος του Simpson $y^{n+2} - y^n = \frac{h}{3}(f^{n+2} + 4f^{n+1} + f^n)$ έχει τάξη ακρίβειας $p = 4$.

2) Οι Ανάδρομων διαφορών κ-βηματικές μέθοδοι έχουν τάξη ακρίβειας ακριβώς κ.

3) Εμπόδια (barriers) (Dahlquist)
Η μέγιστη τάξη ακρίβειας ευσταθούς κ-βηματικής μεθόδου είναι

- $p = k + 2$ αν κ άρτιος
- $p = k + 1$ αν κ περιττός.

Ορισμός: Συνεπής μέθοδος λέγεται κάθε μέθοδος που έχει τάξη ακρίβειας $p \ge 1$.

Αν $p \ge 1 \implies C_0 = 0 = p(1) \to$ Το 1 πάντα ρίζα του $p(z)$

$$C_1 = 0 = p'(1) - \sigma(1) \quad , \sigma(z) = \sum_{j=0}^{k} b_j z^j$$

3. Σύγκλιση και εκτίμηση σφάλματος

Θεώρημα: Αν μια κ-βηματική μέθοδος είναι ευσταθής, και έχει τάξη ακρίβειας $p \ge 1$, τότε αν $y \in C^{p+1}[\alpha, b]$

$$\max_{0 \le n \le N} |y^n - y(t^n)| \le C \left\{ \max_{0 \le j \le k-1} |y^j - y(t^j)| + h^p \right\}$$

ανεξάρτητο του h

Συμπέρασμα: Το τοπικό σφάλμα της μεθόδου RK που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των y^j, $1 \le j \le k-1$ πρέπει να είναι τάξης $O(h^p)$

Ευστάθεια + Συνέπεια $\longrightarrow$ Σύγκλιση

4. Απόλυτη Ευστάθεια

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο στο

$$(*) \begin{cases} y' = \lambda y, & t \ge 0 \quad Re\lambda \le 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Το οποίο έχει φραγμένη λύση $|y(t)| = |e^{\lambda t}| \le 1$ και ζητάμε το ίδιο και από την αριθμητική μέθοδο.

Ορισμός: Μια πολυβηματική μέθοδος λέγεται απόλυτα ευσταθής για κάποιο $h > 0$, αν όταν εφαρμοσθεί στο $(*)$ δίνει φραγμένες λύσεις.

Δηλαδή $\exists\, C > 0 : |y^n| \le C \quad \forall n$

Περιοχή Απόλυτης Ευστάθειας

$S = \{\mu = h\lambda \in \mathbb{C},\ Re\,\mu < 0 :$ Η μέθοδος να είναι απόλυτα ευσταθής για αυτό το $h\}$

Πρόταση: Η μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής για το $h\lambda \iff$ Το πολυώνυμο $\Pi(z, h\lambda) \equiv p(z) - h\lambda\,\sigma(z)$ πληροί τη συνθήκη των ριζών

Απόδειξη:

Έστω μια μέθοδος απόλυτα ευσταθής, την εφαρμόζω στο $(*)$ $\Longrightarrow$

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y^{n+j} = h\lambda \sum_{j=0}^{k} b_j y^{n+j} \Longrightarrow \sum_{j=0}^{k} (\underbrace{\alpha_j - h\lambda b_j}_{\text{οι συντελεστές του } \Pi(z,h\lambda)}) y^{n+j} = 0$$

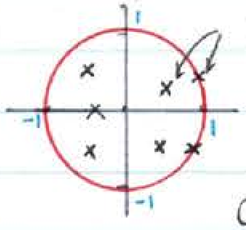
Για να είναι $|y^n| \le C \ \forall n$ πρέπει το $p(z) - h\lambda\,\sigma(z)$ να πληροί τη συνθήκη των ριζών.

Οι ρίζες $z_i \equiv z_i(h\lambda)$ είναι συναρτήσεις του $h\lambda$.

$S = \{\mu = h\lambda \in \mathbb{C},\ Re\,\mu < 0 : \Pi(z, h\lambda) \equiv p(z) - h\lambda\,\sigma(z)$ πληροί συνθήκη των ριζών$\}$

Εφ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ

14/5/2019



Οι ρίζες του $\Pi(z)$ όταν $\mu=0$

Ερώτημα: Τι παθαίνουν οι ρίζες όταν μ αλλάζει;

Οι ρίζες του $\Pi(z)$ είναι συνεχείς συναρτήσεις των συντελεστών
Καθώς το μ παίρνει μικρές τιμές, αλλά $Re\,\mu<0$ οι ρίζες θα κινηθούν
Αυτές που είναι μέσα στο κύκλο θα μείνουν μέσα για μικρές μετατοπίσεις του μ.
αλλά αυτές που είναι πάνω στο κύκλο μπορεί να βρεθούν απέξω

Παραδείγματα:

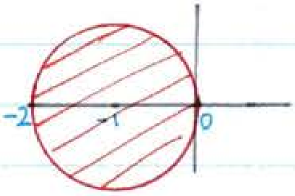
1. Euler $y^{n+1}-y^{n} = h f^{n}$

$p(z) = z-1$, $\sigma(z) = 1$ $\Big\} \Rightarrow$ $\Pi(z) = z-1-\overbrace{h\lambda}^{\mu} = z-1-\mu$

άρα έχει ρίζα $z_1 = 1+\mu$

· Για $\mu=0 \Rightarrow z_1 = 1$

$|z_1| = |1+\mu| \overset{?}{\le} 1 \Rightarrow$ όταν $\mu \in S \longrightarrow$



2. $y^{n+2}-y^{n} = 2h f^{n+1}$, Ευσταθής, $p=2$

$p(z) = z^2-1 \rightsquigarrow \Pi(z,\mu) = z^2-1-2\mu z$

$\sigma(z) = 2z$ όταν $\mu=0$ $z_1=1$, $z_2=-1$

$z_1(\mu), z_2(\mu) \in \mathbb{C}$. Ισχύει $z_1 z_2 = -1 \Rightarrow |z_1|\,|z_2| = 1 \Rightarrow$

Ο μόνος τρόπος για να είναι η μέθοδος απόλυτα ευσταθής, είναι να βρω τα μ για τα οποία οι ρίζες θα κινούνται πάνω στον κύκλο.

Ειδική περίπτωση: $\mu \in \mathbb{R}$ με $\mu \le 0$ (θα βρω διάστημα απόλυτης ευστάθειας)

$z_1 = \mu + \sqrt{1+\mu^2}$. Έστω $\mu<0$ $\quad \mu + \sqrt{1+\mu^2} \overset{??}{<} 1 \Rightarrow \sqrt{1+\mu^2} \overset{??}{<} 1-\mu \Rightarrow$

$z_2 = \mu - \sqrt{1+\mu^2}$ $\quad 1+\mu^2 \overset{??}{<} 1+\mu^2-2\mu \Rightarrow \mu<0$

Για κάθε $\mu<0$ η $|z_1|<1$ άρα η $|z_2|>1 \Rightarrow$ η μέθοδος δεν είναι απόλυτα ευσταθής για κανένα h, $S=\{0\}$

Δεν υπάρχουν πολυβηματικές μέθοδοι με τάξη ακρίβειας $p>2$ που να είναι Α-ευσταθής