Μάθημα 16ο Εφ. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ 20/5/2019

Έστω η πολυβηματική μέθοδος : $\sum_{j=0}^{k} \alpha_j y^{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} b_j f^{j+n}$

$p(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z_1 + \dots + \alpha_k z^k$

$\sigma(z) = b_0 + b_1 z_1 + \dots + b_k z^k$

Απόλυτα ευσταθής $\iff$ $\pi(z, \lambda h) = p(z) - h\lambda \sigma(z)$ πληροί τη συνθήκη των ριζών

Περιοχή απόλυτης ευστάθειας

$S = \{ \mu \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}\,\mu \leq 0 : \pi(z,\mu)$ πληροί τη συνθήκη των ριζών$\}$

A - ευσταθής $\iff$ $S = \{ z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \leq 0 \}$

- Euler: $y^{n+1} - y^n = h f^n$, $S =$  $p=1$

- Πεπλεγμένη Euler: $y^{n+1} - y^n = h f^{n+1}$, A - ευσταθής , $p = 1$

- Τραπεζίου: $y^{n+1} - y^n = h\left(\frac{1}{2} f^{n+1} + \frac{1}{2} f^n\right)$, A-ευσταθής , $p=2$

- $y^{n+2} - y^n = 2h f^{n+1}$, $S = \{0\}$, $p = 2$.

Θεωρία Schur

Ορισμός. Ένα πολυώνυμο $\pi(z) \in \mathbb{P}_k$ λέγεται (πολυώνυμο) Von Neumann αν πληροί τη συνθήκη των ριζών.

Ορισμός. Ένα πολυώνυμο $\pi(z) \in \mathbb{P}_k$ λέγεται (πολυώνυμο) Schur αν οι ρίζες του πληρούν $|z_i| \leq 1 \ \forall i$

Αν $\pi(z)$ Von Neumann $\Longrightarrow$ $\pi(z)$ Schur

Δεδομένου $\pi(z) = \gamma_0 + \gamma_1 z + \gamma_2 z^2 + \dots + \gamma_k z^k$,

ορίζουμε $\pi^*(z) = \bar{\gamma}_k + \bar{\gamma}_{k-1} z + \dots + \bar{\gamma}_0 z^k$

άρα $\pi^*(z) = z^k \bar{\pi}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)$

$$\Pi_1(z) = \frac{1}{z}\left(\Pi^*(0)\,\Pi(z) - \Pi(0)\,\Pi^*(z)\right) = \frac{1}{z}\left[\bar{\gamma}^k(\gamma_0+\gamma_1 z+\dots+\gamma_k z^k) - \gamma_0(\bar{\gamma}_k+\bar{\gamma}_{k-1}z+\dots+\bar{\gamma}_0 z^k)\right]$$

$$= \frac{1}{z}\left[(\bar{\gamma}_k - \bar{\gamma}_0 - \gamma_0\bar{\gamma}_k) + (\bar{\gamma}_k\gamma_1 - \gamma_0\bar{\gamma}_{k-1})z + \dots + (\dots)z^k\right]$$

$$= \delta_1 + \delta_2 z + \dots + \delta^k z^{k-1} \in \mathbb{P}_{k-1}$$

$\delta_1 = \bar{\gamma}_k\gamma_1 - \gamma_0\bar{\gamma}_{k-1}, \dots$

Θεώρημα: (i) Π Schur $\iff |\Pi^*(0)| > |\Pi(0)|$ και Π_1 Schur

(ii) Π Von Neumann $\iff$ είτε (α) $|\Pi^*(0)| > |\Pi(0)|$ και Π_1 Von Neumann

είτε (β) $\Pi_1(0) = 0$ και $\frac{d\Pi}{dt}$ Schur

PDF

$K=1$: $y^{n+1} - y^n = h f^{n+1}$

$K=2$: $\frac{3}{2}y^{n+2} - 2y^{n+1} + \frac{1}{2}y^n = h f^{n+2}$

Γράφεται και έτσι

$\frac{3}{2}(y^{n+2} - y^{n+1}) - \frac{1}{2}(y^{n+1} - y^n)$

Θα αποδείξουμε ότι είναι Α-ευσταθής

Πάω να δείξω ότι είναι Von Neumann

$p(z) = \frac{3}{2}z^2 - 2z + \frac{1}{2}$, $\sigma(z) = z^2$ $\qquad \mu = h\lambda$

$\Pi(z,\mu) = p(z) - \mu\,\sigma(z) = \left(\frac{3}{2} - \mu\right)z^2 - 2z + \frac{1}{2} \in \mathbb{P}_2$

όταν $\mu = 0$ $\quad \Pi = p$

$3z^2 - 4z + 1 = 0 \longrightarrow z_1 = 1,\ z_2 = 1/3$

Αν $\mu \neq 0, \mu \in \mathbb{C}$ $\quad z_1(\mu), z_2(\mu)$ συνεχείς συναρτήσεις ως προς μ.

Η $z_2(\mu)$ για μικρά $|\mu|$ θα παραμείνει εντός του ανοιχτού δίσκου.

Δεν γνωρίζω για την $z_1(\mu)$.

$\Pi(z) = (3/2 - \mu)z^2 - 2z + 1/2$

$\Pi^*(z) = z^2\,\bar{\Pi}(1/z) = (3/2 - \bar{\mu}) - 2z + \frac{1}{2}z^2$

$\Pi^*(0) = 3/2 - \bar{\mu}$ $\qquad$ θέτω $\mu = \alpha + i\beta$, $\alpha \leq 0$

$\Pi(0) = 1/2$

$|\Pi^*(0)| \overset{?}{>} |\Pi(0)| \rightarrow |3/2 - \alpha - i\beta| \overset{?}{>} 1/2 \rightarrow (3/2 - \alpha)^2 + \beta^2 \overset{?}{>} 1/4 \rightarrow$

$9/4 + \alpha^2 + \beta^2 \overset{?}{>} 1/4 \rightsquigarrow 2 - 3\alpha + \alpha^2 + \beta^2 > 0$ ΝΑΙ

Ε9. Υπολογιστικά Μαθηματικά ΙΙ

20/5/2019

$$\Pi_1(z) = \frac{1}{z}\left(\Pi^*(0)\Pi(z) - \Pi(0)\Pi^*(z)\right) = \frac{1}{z}\left[\left(\frac{3}{2}-\bar{\mu}\right)\cdot\left(\left(\frac{3}{2}-\mu\right)z^2 - 2z + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\left(\frac{3}{2}-\bar{\mu}\right) - 2z + \frac{1}{2}z^2\right)\right] =$$

$$= \left|\frac{3}{2}-\mu\right|^2 z - 2\left(\frac{3}{2}-\bar{\mu}\right) + 1 \implies$$

$$\Pi_1(z) = \left[\left(\frac{3}{2}-\alpha\right)^2 + \beta^2 - \frac{1}{4}\right]z - \left(3 - 2\alpha + 2i\beta - 1\right) =$$

$$= \left(9/4 + \alpha^2 - 3\alpha + \beta^2 - 1/4\right)z - 2\left(1-\alpha+i\beta\right) =$$

$$= \left(2+\alpha^2-3\alpha+\beta^2\right)z - 2\left(1-\alpha+i\beta\right)$$

αρκεί να δείξω ότι $|z_1| \le 1 \iff$

$$|z_1| = \left|\frac{2(1-\alpha+i\beta)}{(2+\alpha^2+\beta^2-3\alpha)}\right| \le 1 \iff |2(1-\alpha+i\beta)|^2 \le |2+\alpha^2+\beta^2-3\alpha| \iff$$

$$4\left((1-\alpha)^2+\beta^2\right) \le \left(2+\alpha^2-3\alpha+\beta^2\right)^2 \iff$$

$$4+4\alpha^2-8\alpha+4\beta^2 \le 4+\alpha^4+9\alpha^2+\beta^4+2\alpha^2-12\alpha+4\beta^2+2\alpha^2-6\alpha^3+2\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta^2$$

$$4+4\alpha^2-8\alpha+4\beta^2 \le 4+\alpha^4+\beta^4+13\alpha^2-12\alpha-6\alpha^3+4\beta^2+2\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta^2 \iff$$

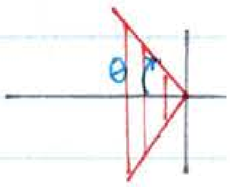
$$0 \le 9\alpha^2-4\alpha-6\alpha^3+\alpha^4+\beta^4+4\beta^2+2\alpha^2\beta^2-6\alpha\beta^2$$ που ισχύει $\forall \beta, \forall \alpha<0$

Dahlquist – Πολυβηματικές

(1) ∄ Α-ευσταθείς άμεσες μέθοδοι

(2) Α-ευσταθείς $\implies p \le 2$

$A(\theta)$-ευσταθείς, $0<\theta\le\pi/2$ $\iff$ Απόλυτα ευσταθείς μέθοδοι και η περιοχή απόλυτης ευστάθειας



A_0-ευσταθείς μέθοδοι $\iff$ απόλυτη ευστάθεια για $\operatorname{Im} z=0$
(δηλαδή έχει άπειρο διάστημα απόλυτης ευστάθειας)

Μέθοδοι ανάδρομων διαφορών BDF

$k=1 \to \theta=\pi/2$ $k=5 \to \theta=52^\circ$

$k=2 \to \theta=\pi/2$ $k=6 \to \theta=18^\circ$

$k=3 \to \theta=86^\circ$ $k\ge 7 \to$ οι μέθοδοι δεν είναι ευσταθείς.

$k=4 \to \theta=73^\circ$

Θεώρημα: $\forall\, \theta\in(0,\pi/2)$ $\exists$ $A(\theta)$-ευσταθής πολυβηματική μέθοδος με $p=k$.