Μάθημα 3ο Ε12. Θεωρία Ελέγχου 16/10/2018

$\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $\underline{u} = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{pmatrix}$

$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau)\,d\tau$

$\underline{y}(t) = C\underline{x}(t) + D\underline{u}(t) = C e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t C \cdot e^{A(t-\tau)} B\underline{u}(\tau)\,d\tau + D\underline{u}(t)$

Υπολογισμός e^{At}

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Το πολυώνυμο $\varphi(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_0$ είναι το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A και το φάσμα του A, $\sigma(A) = \{\lambda_i \in \mathbb{C} : \varphi(\lambda_i) = 0\}$

Ορισμός: Αν $\lambda \in \sigma(A)$ τότε ο ιδιόχωρος του A είναι ο $N_{\lambda_i} = \mathrm{Ker}(\lambda_i I - A) = \{\underline{u} \in \mathbb{C}^n : (\lambda_i I - A)\underline{u} = \underline{0}\}$

Ορισμός: $\dim N_{\lambda_i} =: d_i$ είναι η γεωμετρική πολλαπλότητα της λ_i (δηλαδή d_i είναι ο μέγιστος αριθμός από γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_i)

Έστω $\varphi(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)^{\tau_1}(\lambda-\lambda_2)^{\tau_2}\dots(\lambda-\lambda_p)^{\tau_p}$ όπου $\lambda_i \neq \lambda_j$ αν $i \neq j$, τότε τ_i είναι η αλγεβρική πολλαπλότητα της λ_i (και προφανώς $\sum_{i=1}^{p} \tau_i = n$)

Ισχύει ότι $\forall\, i = 1, 2, \dots, p$ $\quad 1 \le d_i \le \tau_i$

Ορισμός: Αν ισχύει $\tau_i = d_i$ $\forall\, i = 1, 2, \dots, p$ τότε ο A είναι απλής δομής διαφορετικά ο A είναι μη απλής δομής

Λήμμα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\}$ διακεκριμένες ιδιοτιμές και $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_m\}$ αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα ($A\underline{u}_i = \lambda_i \underline{u}_i$, $\underline{u}_i \neq \underline{0}$), τότε τα $\{\underline{u}_i\}_{i=1}^{m}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα

Απόδειξη:

Έστω $\{\underline{u}_i\}_{i=1}^{m}$ είναι γραμμικά εξαρτημένα και έστω k ο ελάχιστος ακέραιος τέτοιος ώστε $u_k \in \mathrm{Span}\{\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_{k-1}\}$ $k \in \{1, 2, \dots, m\}$, τότε

$\underline{u}_k = \alpha_1 \underline{u}_1 + \alpha_2 \underline{u}_2 + \dots + \alpha_{k-1}\underline{u}_{k-1}$ (*)

$\Rightarrow A\underline{u}_k = \alpha_1 A\underline{u}_1 + \alpha_2 A\underline{u}_2 + \dots + \alpha_{k-1} A\underline{u}_{k-1} \Rightarrow \lambda_k \underline{u}_k = \alpha_1\lambda_1\underline{u}_1 + \alpha_2\lambda_2\underline{u}_2 + \dots + \alpha_{k-1}\lambda_{k-1}\underline{u}_{k-1}$ (*)

Πολλαπλασιάζοντας την (*) με λ_k και αφαιρόντας την από την (*)

$0 = \alpha_1(\lambda_1 - \lambda_k)\underline{u}_1 + \alpha_2(\lambda_2-\lambda_k)\underline{u}_2 + \dots + \alpha_{k-1}(\lambda_{k-1}-\lambda_k)\underline{u}_{k-1} \Rightarrow \alpha_j(\lambda_j - \lambda_k) = 0 \;\forall j = 1, 2, \dots, k-1$

όμως $\lambda_j-\lambda_k \neq 0 \ \forall j=1,2,\dots,k-1 \implies \alpha_j = 0 \ \forall j=1,2,\dots,k-1$, τότε $\underline{u}_k=\underline{0}$
Άτοπο αφού $\underline{u}_k$ ιδιοδιάνυσμα.

Λήμμα: Πίνακες απλής δομής ($A\in\mathbb{R}^{n\times n}$) έχουν γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα
Απόδειξη:
Έστω $\{\lambda_1,\dots,\lambda_p\}$ διακεκριμένες ιδιοτιμές με αλγεβρικές πολλαπλότητες $\{\tau_1,\tau_2,\dots,\tau_p\}$ και $\{u_{11},\dots,u_{1\tau_1},u_{21},\dots,u_{2\tau_2},\dots,u_{p1},\dots,u_{p\tau_p}\}$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, όπου $\{u_{ij}\}_{j=1,\dots,\tau_i}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα
Έστω ο γραμμικός συνδυασμός $\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{\tau_i}\alpha_{ij}u_{ij}=\underline{0} \implies \underline{w}_1+\underline{w}_2+\dots+\underline{w}_p=\underline{0}$
$\implies w_i=0 \ \forall i=1,\dots,n$ (από προηγούμενο λήμμα)
$\implies \sum_{j=1}^{\tau_i}\alpha_{ij}\underline{u}_{ij}=0 \ \forall i=1,2,\dots,p \implies \alpha_{ij}=0 \ \forall i,j \implies \{u_{ij}\}$ γραμμικά ανεξάρτητα

Θεώρημα: Αν $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ απλής δομής τότε $\exists\, U\in\mathbb{C}^{n\times n}$, $\det(U)\neq 0$:
$A=U\Lambda U^{-1}$, $\Lambda=\mathrm{diag}(\Lambda)$ (διαγώνιος) (και αντίστροφα)
Απόδειξη: ($\implies$)
Έστω $\{u_{ij}\}_{i=1,\dots,p}^{j=1,\dots,\tau_i}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

$$A\cdot[\underline{u}_{11},\dots,\underline{u}_{1\tau_1}|\dots|\underline{u}_{p1},\dots,\underline{u}_{p\tau_p}]=[u_{11},\dots,u_{1\tau_1}|\dots|\underline{u}_{p\tau_p}]\begin{bmatrix}\lambda_1 I_{\tau_1} & & \\ & \lambda_2 I_{\tau_2} & \\ & & \ddots \\ & & & \lambda_p I_{\tau_p}\end{bmatrix} \implies A=U\Lambda U^{-1}$$

Θεώρημα: Αν $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ είναι απλής δομής, τότε $e^{At}=U\cdot e^{\Lambda t}U^{-1}$, όπου $e^{\Lambda t}$ διαγώνιος
Απόδειξη:
Έστω $A=U\cdot\Lambda\cdot U^{-1} \implies A^2=U\cdot\Lambda\cdot U^{-1}\cdot U\cdot\Lambda\cdot U^{-1}=U\Lambda^2U^{-1} \implies A^k=U\cdot\Lambda^k\cdot U^{-1}$
Έχουμε $A^0=I$

$$e^{At}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{U\Lambda^kU^{-1}t^k}{k!}=U\cdot\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Lambda^kt^k}{k!}\right)U^{-1}=U\cdot e^{\Lambda t}U^{-1}$$

$$e^{\Lambda t}=\begin{bmatrix}e^{\lambda_1 t}\cdot I_{\tau_1} & & \\ & e^{\lambda_2 t}\cdot I_{\tau_2} & \\ & & \ddots \\ & & & e^{\lambda_p t}I_{\tau_p}\end{bmatrix}$$

Ε12. Θεωρία Ελέγχου
16/10/2018

Παράδειγμα

$A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, $\sigma(A)=\{\underset{\lambda_1}{-1},\ \underset{\lambda_2}{1}\}$

Για $\lambda=\lambda_1=-1$

$(A-\lambda I_2)\underline{u}_1=\underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix}0 & 2\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=0 \Rightarrow \beta=0 \Rightarrow u_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$

Για $\lambda=\lambda_2=1$

$(A-\lambda I_2)\underline{u}_2=\underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix}-2 & 2\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha\\ \beta\end{bmatrix}=\underline{0} \Rightarrow \alpha=\beta \Rightarrow \underline{u}_2=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$\underline{U}=[\underline{u}_1,\underline{u}_2]=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow U^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

$A=U\cdot\Lambda\, U^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow$

$e^{At}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-t} & 0\\ 0 & e^{t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-t} & e^{t}-e^{-t}\\ 0 & e^{t}\end{bmatrix}$

Πίνακες μη απλής δομής

Αν $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ έχουμε $d_i<r_i$ για κάποιο λ_i

Ορισμός: Το διάνυσμα $\underline{v}$ λέγεται γενικευμένο ιδιοδιάνυσμα τάξης p $(p\geq 1)$ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda\in\sigma(A)$ αν:

$(A-\lambda I)^{p}\cdot\underline{v}=0$ και $(A-\lambda I)^{p-1}\cdot\underline{v}\neq 0$ (Αν $p=1$ το $\underline{v}$ είναι ιδιοδιάνυσμα)

Ορισμός: Μια αλυσίδα γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων μήκους k που παράγεται από το v_1 ορίζεται

(i) $(A-\lambda I)\underline{v}_k=\underline{v}_{k-1}$ (ii) $\{v_i\}_{i=1}^{k}$ γραμμικά ανεξάρτητα

$(A-\lambda I)\underline{v}_{k-1}=\underline{v}_{k-2}$

$\vdots$

$(A-\lambda I)\underline{v}_2=\underline{v}_1$

$(A-\lambda I)\underline{v}_1=0$

$$A[\underline{v}_1,\underline{v}_2,\dots,\underline{v}_k]=[\underline{v}_1\ \underline{v}_2\dots\underline{v}_k]=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & 1 & & \vdots\\ \vdots & 0 & \lambda & \ddots & 0\\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{bmatrix}$$

Θεώρημα: (i) $v_j \in Ker[(A-\lambda I)^j]$

(ii) $Ker[(A-\lambda I)^j] \subseteq Ker[(A-\lambda I)^{j+1}]$

Απόδειξη:

(i) $(A-\lambda I)^j \cdot v_j = (A-\lambda I)^{j-1} \underbrace{(A-\lambda I) v_j}_{v_{j-1}} = (A-\lambda I) \underline{v}_1 = 0$

Ερωτήματα και οι απαντήσεις τους

1 Πόσες αλυσίδες αντιστοιχούν σε μια οποιαδήποτε ιδιοτιμή; έστω $\varphi(s) = (s-\lambda)^{\tau}(\dots)\dots(\dots)$

Απάντηση: d αλυσίδες (γεωμετρική πολλαπλότητα)

$(\underbrace{rank[\lambda I - A]}_{r_1} + \underbrace{null[\lambda \cdot I - A]}_{d}) = n \Rightarrow r_1 = n-d$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} J_1(\lambda) & & & \\ & J_2(\lambda) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_d(\lambda) \end{bmatrix}}^{\tau}$$

2 Ποιό είναι το μήκος της μέγιστης αλυσίδας;

Απάντηση: Ορίζουμε: $r_i = rank[\lambda I - A]^i \quad i \geq 1$

$d_i = null[\lambda I - A]^i \quad (null(A) = dim(Ker(A)) = dim\{\underline{x} : A\underline{x} = \underline{0}\})$

Έχουμε $(r_i) \downarrow$ φθίνουσα $\quad (d_i) \uparrow$ αύξουσα

Το μήκος της μέγιστης αλυσίδας : ℓ είναι ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο έχω $r_\ell = r_{\ell+1}$

3 Ποιό είναι το μήκος κάθε αλυσίδας;

Απάντηση: Σχηματίζουμε τη χαρακτηριστική Segré

$S := [\underbrace{n-r_1}_{d} \quad r_1 - r_2 \quad r_2 - r_3 \ \dots \ r_{\ell-1} - r_\ell]$

Διάγραμμα Ferre

# των γενικευμένων $1^{ης}$ τάξης είναι $(n-r_1)$	π.χ: 5	*	*	*	*	*	Το άθροισμα κάθε
# των γενικευμένων $2^{ης}$ τάξης είναι (r_1-r_2)	π.χ: 3	*	*	*			στήλης δίνει την διάσταση
# των γενικευμένων $\ell^{ης}$ τάξης είναι $(r_{\ell-1}-r_\ell)$	π.χ: 2	*	*				του κάθε block

Παράδειγμα: $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$, για μια ιδιοτιμή $\lambda \in \sigma(A)$

$r_1 = rank[A-\lambda I] = 5$

$r_2 = rank[A-\lambda I]^2 = 3$

$r_3 = rank[A-\lambda I]^3 = 2$

$r_4 = rank[A-\lambda I]^4 = 1 \quad \longleftarrow \ \ell = 4$

$r_5 = rank[A-\lambda I]^5 = 1$

Ε12. Θεωρία Ελέγχου

16/10/2018

Χαρακτηριστική Segré

$S = [n - r_1 , r_1 - r_2 , r_2 - r_3 , r_3 - r_4] = [10-5 , 5-3 , 3-2 , 2-1] = [5,2,1,1]$

Διάγραμμα Ferre

1ης Τάξης	*	*	*	*	*
2ης Τάξης	*	*	1	1	1
3ης Τάξης	*	2			
4ης Τάξης	*				
	4				

$$A \cdot [u_{11}\ u_{12}\ u_{13}\ u_{14} \vdots u_{15}\ u_{16} \vdots u_{17} \vdots u_{18} \vdots u_{19}] =$$

$$= [u_{11}\ u_{12}\ u_{13}\ u_{14} \vdots u_{15}\ u_{16} \vdots u_{17} \vdots u_{18} \vdots u_{19} \vdots u_{21}] \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & & & & \bigcirc & & \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & & & & & & \\ & & & & \lambda & 1 & & & & \\ & & & & 0 & \lambda & & & & \\ & & \bigcirc & & & & \lambda & & & \\ & & & & & & & \lambda & & \\ & & & & & & & & \lambda & \\ & & & & & & & & & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Ιδιοδιανύσματα

$\varphi(s) = (s-\lambda)^9 (s-\lambda_2)^1$

Μάθημα 4ο Ε12. Θεωρία Ελέγχου 23/10/2018

Λήμμα: Αν $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $AB = BA$ τότε $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$

Απόδειξη:

Ορίζω $\Phi(t) = e^{(A+B)t} e^{-At} e^{-Bt}$

$$\Phi'(t) = e^{(A+B)t}(A+B)e^{-At}\cdot e^{-Bt} + e^{(A+B)t}(-A)e^{-At}e^{-Bt} + e^{(A+B)t}e^{-At}(-B)e^{-Bt} =$$
$$= e^{(A+B)t}\{(A+B)e^{-At} - Ae^{-At} - e^{-At}B\}e^{-Bt} = e^{(A+B)t}(Be^{-At} - e^{-At}B)\,e^{-Bt}$$

Όμως $B\cdot e^{-At} = B(I - At + \frac{A^2t^2}{2!} - \dots) = (B - ABt + \frac{A^2Bt^2}{2!} - \dots) = e^{-At}B$

Επομένως $\Phi'(t) = \Phi(0) = I \Longrightarrow e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} = e^{Bt}e^{At}$

Θεώρημα: Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ με ιδιοτιμές $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p\}$, αλγεβρικές πολλαπλότητες $\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p\}$ και Jordan blocks $\{J_1, J_2, \dots, J_p\}$. Έστω $J_i = \mathrm{diag}\{J_{i1}, J_{i2}, \dots, J_{id_i}\}$ όπου

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda_i & 1 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{k_{ij}\times k_{ij}}$$

Τότε αν U είναι ένας πίνακας γενικευμένων ιδιοδιανυσμάτων, δηλαδή $A = U\cdot J\cdot U^{-1}$ έχουμε: $e^{At} = Ue^{Jt}U^{-1}$ όπου $e^{Jt} = \mathrm{diag}\{e^{J_1t}, \dots, e^{J_pt}\}$ και $e^{J_it} = \mathrm{diag}\{e^{J_{i1}t}, \dots, e^{J_{id_i}t}\}$ όπου

$$e^{J_{i}t} = e^{\lambda_i t}\begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2! & \dots & t^{k_{ij}-1}/(k_{ij}-1)! \\ 0 & 1 & t & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & t^2/2! \\ \vdots & & & \ddots & t \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Απόδειξη:

Βασίζεται στις παρακάτω παρατηρήσεις

(i) $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kt^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{UJ^kU^{-1}t^k}{k!} = U\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{J^kt^k}{k!}\right)U^{-1} = Ue^{Jt}U^{-1}$

(ii) $e^{Jt} = e^{\mathrm{diag}(J_1t, \dots, J_pt)} = \mathrm{diag}\{e^{J_1t}, \dots, e^{J_pt}\}$

(iii) Παρόμοια $e^{J_it} = \mathrm{diag}\{e^{J_{i1}t}, e^{J_{i2}t}, \dots, e^{J_{id_i}t}\}$

(iv) $e^{J_{ij}t} = \lambda_i I_{k_{ij}} + N_{ij}$ όπου N_{ij} είναι μηδενοδύναμος και

$$N_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad N_{ij}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & 1 \\ & & & & & 0 \\ 0 & \cdots & & & & 0 \end{bmatrix}, \ldots, N_{ij}^{k_{ij}} = 0$$

έχουμε

$$e^{J_{ij}t} = e^{(\lambda_i I + N_{ij})t} = e^{\lambda_i t} e^{N_{ij}t} = e^{\lambda_i t}\left\{ I_{k_{ij}} + tN_{ij} + \frac{t^2}{2!}N_{ij}^2 + \ldots + \frac{t^{k_{ij}-1}}{(k_{ij}-1)!}N_{ij}^{k_{ij}-1}\right\}$$

$$= e^{\lambda_i t}\left\{ \begin{bmatrix} 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \\ \emptyset & & 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \emptyset \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ \emptyset & & & 0 \end{bmatrix} + \ldots + \frac{t^{k_{ij}-1}}{(k_{ij}-1)!}\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Παραδείγματα:

1.

$$J = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 : \ \tau_1 = 3,\ d_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 : \ \tau_2 = d_2 = 1 \\ \varphi(\lambda) = (\lambda-1)^3(\lambda-2) \end{array} \quad \text{ΤΟΤΕ}$$

$$e^{Jt} = \left[\begin{array}{ccc|c} e^t & te^t & \frac{t^2}{2!}e^t & 0 \\ 0 & e^t & t\cdot e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{array}\right]$$

2.

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ 0 & 2 & & & & & \\ & & 2 & 1 & 0 & & \\ & & 0 & 2 & 1 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & & \\ & & & & & 3 & 1 \\ & & & & & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} A = UJU^{-1} \Rightarrow e^{At} = Ue^{Jt}U^{-1} \\ \varphi(\lambda) = (\lambda-2)^5(\lambda-3)^2 \\ \lambda_1 = 2,\ \tau_1 = 5,\ d_1 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \quad \tau_2 = 2,\ d_2 = 1 \end{array} \quad \text{ΤΟΤΕ}$$

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & te^{2t} & & & & & \\ 0 & e^{2t} & & & & & \\ & & e^{2t} & te^{2t} & \frac{1}{2}t^2e^{2t} & & \\ & & 0 & e^{2t} & te^{2t} & & \\ & & 0 & 0 & e^{2t} & & \\ & & & & & e^{3t} & te^{3t} \\ & & & & & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

Ε.12 Θεωρία Ελέγχου 23/10/2018

Μιγαδικές Ιδιοτιμές

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και έστω $(\lambda, \underline{u})$ ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος, όπου $\lambda = \sigma + i\cdot\omega$ $(\sigma, \omega \in \mathbb{R}, \omega \neq 0)$ και $\underline{u} = \underline{x} + i\underline{y}$ $(\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n)$
Τότε $A\underline{u} = \lambda\underline{u} \Rightarrow A\bar{\underline{u}} = \bar{\lambda}\bar{\underline{u}}$ και επομένως $(\bar{\lambda}, \bar{\underline{u}})$ είναι επίσης ζεύγος ιδιοτιμής/ιδιοδιανύσματος

$$A(\underline{x}+i\underline{y}) = (\sigma + i\omega)(\underline{x}+i\underline{y}) \Rightarrow \left.\begin{aligned} A\underline{x} &= \sigma\underline{x} - \omega\cdot\underline{y} \\ A\underline{y} &= \omega\underline{x} + \sigma\underline{y} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$A[\underline{x} \mid \underline{y}] = [\underline{x} \mid \underline{y}] = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma & -\omega & 1 & 0 \\ \omega & \sigma & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \sigma & -\omega \\ 0 & 0 & \omega & \sigma \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{aligned} \tau &= 2 \\ d &= 1 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\sigma + i\omega \\ &\sigma - i\omega \end{aligned}$$

Χρονικά Ανεξάρτητα Συστήματα
Συναρτήσεις μεταφοράς (συχνοτήτων)

Το σύστημα είναι της μορφής: $\left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= C\underline{x} + D\underline{u} \end{aligned}\right\} \Sigma(A,B,C,D)$

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p\times m}$

Ισοδύναμα: $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p)\times(n+m)}$

Μετασχηματισμός Laplace : $\mathcal{L}(\underline{x}) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt = \hat{x}(s)$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace

$$\left.\begin{aligned} s\cdot\hat{\underline{x}}(s) - x_0 &= A\hat{\underline{x}}(s) + B\hat{\underline{u}}(s) \\ \hat{\underline{y}}(s) &= C\hat{\underline{x}}(s) + D\hat{\underline{u}}(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow (sI_n - A)\hat{\underline{x}}(s) = B\hat{\underline{u}}(s) + x_0 \Rightarrow$$

$$\hat{\underline{x}}(s) = (sI - A)^{-1} B\hat{\underline{u}}(s) + (sI-A)^{-1}\cdot x_0$$

Αντικαθιστώντας: $\hat{\underline{y}}(s) = [C(sI-A)^{-1}B + D]\hat{\underline{u}}(s) + C(sI-A)^{-1}\underline{x_0}$

Αν $x_0 = 0$ τότε $\hat{y}(s) = \hat{G}(s) \cdot \hat{u}(s)$ όπου $\hat{G}(s) = C(sI-A^{-1})B + D$ η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος, έχουμε

$$(sI-A)^{-1} = \frac{adj(sI-A)}{\varphi(s)} \quad , \varphi(s) = (sI-A)$$

Αν $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε $\deg(\varphi(s)) = n$, $\deg(adj(sI-A)) \leq n-1$

Έχουμε $\hat{G}(s) = C \cdot (sI-A)^{-1}B + D = \dfrac{C\, adj(sI-A)B}{\varphi(s)} + D =$

$$= \frac{C\, adj(sI-A)B + D\cdot\varphi(s)}{\varphi(s)} := \frac{N(s)}{\varphi(s)} \quad , N(s) \in \mathbb{R}^{p\times m}[s]$$

Αν $D_{ij} = 0 \Rightarrow \deg[N_{ij}(s)] \leq n-1 < n = \deg(\varphi)$

Αν $D_{ij} \neq 0 \Rightarrow \deg[N_{ij}(s)] = n = \deg(\varphi)$

Αν $D = 0$, τότε $\deg[N_{ij}(s)] < n \ \forall (i,j)$ και $\hat{G}(s)$ είναι αυστηρά κανονικό.

(διαφορετικά $\hat{G}(s)$ απλά κανονικό)

Παράδειγμα: Έστω $\Sigma(A, \underline{b}, \underline{c}, d)$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}}_{b} u$$

$$y = \overbrace{(1 \quad 0)}^{c} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \underbrace{(0)}_{d} u$$

Έχουμε $\varphi(s) = \det(sI-A) = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1/2 & s+3/2 \end{bmatrix} = s^2 + \underbrace{\frac{3}{2}}_{\alpha_1} s + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\alpha_2} = (s+1/2)(s+1)$

$$adj(sI-A) = \begin{bmatrix} s+3/2 & -1/2 \\ 1 & s \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} s+3/2 & 1 \\ -1/2 & s \end{bmatrix}$$

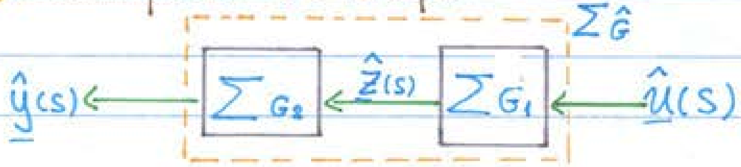
και $\hat{G}(s) = \dfrac{[1 \ \ 0] \begin{bmatrix} s+3/2 & 1 \\ -1/2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \end{bmatrix}}{(s+1/2)(s+1)} = \dfrac{1/2}{(s+1/2)(s+1)}$

(Η συνάρτηση έχει 2 πόλους $-1, -1/2$)

Ε12. Θεωρία Ελέγχου 23/10/2018

Συνδεσμολογία

1 Συστήματα σε σειρά



$$\underline{\hat y}(s) = \hat G_2(s)\underbrace{\underline{\hat z}(s)}_{\hat G_1(s)\underline{\hat u}(s)} = \underbrace{\hat G_2(s)\hat G_1(s)}_{\hat G(s)}\underline{\hat u}(s)$$

Ισοδύναμη συνάρτηση μεταφοράς $\hat G(s) = \hat G_2(s)\hat G_1(s)$

$$\Sigma_{G_1}: \quad \begin{aligned} \underline{x_1}' &= A_1\underline{x_1} + B_1\underline{u} \\ \underline{z} &= C_1\underline{x_1} + D_1\underline{u} \end{aligned}$$

$$\Sigma_{G_2}: \quad \begin{aligned} \underline{x_2}' &= A_2\underline{x_2} + B_2\underline{z} \\ \underline{y} &= C_2\underline{x_2} + D_2\cdot\underline{z} \end{aligned}$$

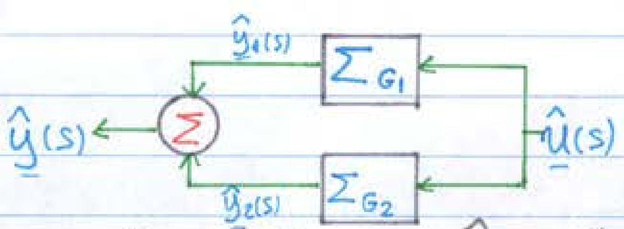
Αν αντικαταστήσω στο δεύτερο από το πρώτο.

$$\underline{x_2}' = A_2\underline{x_2} + B_2(C_1\underline{x_1} + D_1\underline{u})$$

$$\underline{y} = C_2\underline{x_2} + D_2(C_1\underline{x_1} + D_1\underline{u})$$

$$\left.\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{x_1}' \\ \underline{x_2}' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2C_1 & A_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{x_1} \\ \underline{x_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2D_1 \end{bmatrix}\underline{u} \\ \underline{y} &= \begin{bmatrix} D_2C_1 & C_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{x_1} \\ \underline{x_2} \end{bmatrix} + [D_2D_1]\,u \end{aligned}\right\} \Sigma\hat G(s)$$

2 Παράλληλα Συστήματα



$$\underline{\hat y}(s) = \underline{\hat y}_1(s) + \underline{\hat y}_2(s) = \hat G_1(s)\cdot\underline{\hat u}(s) + \hat G_2(s)\,\underline{\hat u}(s) = (\hat G_1(s) + \hat G_2(s))\,\underline{\hat u}(s)$$

και $\hat{G}(s) = \hat{G}_1(s) + \hat{G}_2(s)$

και αν

$$\Sigma G_1 : \quad \underline{x}_1' = A_1 \underline{x}_1 + B_1 \underline{u}$$
$$\underline{y}_1 = C_1 \underline{x}_1 + D_1 \underline{u}$$

$$\Sigma G_2 : \quad \underline{x}_2' = A_2 \underline{x}_2 + B_2 \underline{u}$$
$$\underline{y}_2 = C_2 \underline{x}_2 + D_2 \underline{u}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{x}_1' \\ \underline{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \underline{u}$$

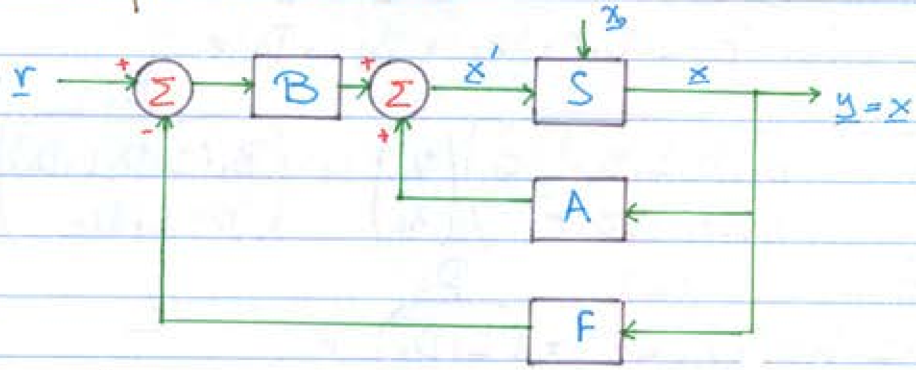
$$\underline{y} = \underline{y}_1 + \underline{y}_2 = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_1 + D_2 \end{bmatrix} \underline{u}$$

Μάθημα 5º Ε12. Θεωρία Ελέγχου 25/10/2018

3. Συστήματα ανάδρασης

(i) Συστήματα ανάδρασης κατάστασης

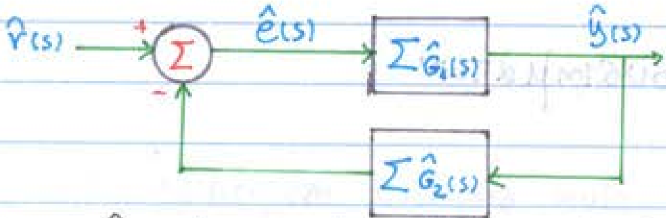
$$\left.\begin{aligned} \underline{x}' &= A\underline{x} + B\underline{u} \\ \underline{y} &= \underline{x} \\ \underline{u} &= \underline{r} - F\underline{x} \\ \underline{x}(0) &= \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned}\right\}$$



$$x' = A\underline{x} + B(\underline{r} - F\underline{x})$$
$$x' = \underbrace{(A - BF)}_{A_c}\underline{x} + B\underline{r}$$

Πρόβλημα "σταθεροποίησης", δηλαδή $\underline{x}' = A\underline{x}$ δεν είναι ευσταθές, είναι δυνατόν μέσω της επιλογής του F, να είναι το $\underline{x}' = A\underline{x}$ ευσταθές;

(ii) Δυναμικά συστήματα ανάδρασης



$$\underline{\hat{y}}(s) = \hat{G}_1(s)\underline{\hat{e}}(s) = \hat{G}_1(s)[\underline{\hat{r}}(s) - \underline{\hat{p}}(s)] = \hat{G}_1[\hat{r} - \hat{G}_2\underline{\hat{y}}]$$

$$(I + \hat{G}_1\hat{G}_2)\hat{y} = \hat{G}_1\hat{r} \Rightarrow \hat{y}(s) = (I + \hat{G}_1\hat{G}_2)^{-1}\hat{G}_1\underline{\hat{r}} = \overbrace{\hat{G}_1(I + \hat{G}_2\hat{G}_1)^{-1}}^{\hat{G}(s)}\hat{r}(s)$$

$$0 \neq |I + \underbrace{\hat{G}_2(s)}_{D_2}\underbrace{\hat{G}_1(s)}_{D_1}|$$

$$\Sigma\hat{G}_1: \left.\begin{aligned} \underline{x}_1' &= A_1\underline{x}_1 + B_1\underline{e} \\ \underline{y} &= C_1\underline{x}_1 + D_1\underline{e} \end{aligned}\right\} \qquad \Sigma\hat{G}_2: \left.\begin{aligned} \underline{x}_2' &= A_2\underline{x}_2 + B_2\underline{y} \\ \underline{p} &= C_2\underline{x}_2 + D_2\underline{y} \end{aligned}\right\} \qquad \underline{e} = \underline{r} - \underline{p}$$

$$\underline{y} = C_1\underline{x}_1 + D_1(\underline{r} - C_2\underline{x}_2 - D_2\underline{y}) \Rightarrow \overbrace{(I + D_1D_2)}^{L_1}\underline{y} = C_1\underline{x}_1 - D_1C_2\underline{x}_2 + D_1\underline{r}$$

$$\Rightarrow \underline{y} = (I + D_1D_2)^{-1}C_1\underline{x}_1 - (I + D_1D_2)^{-1}D_1C_2\underline{x}_2 + (I + D_1D_2)^{-1}D_1\underline{r}$$

$$\Rightarrow \underline{y} = L_1C_1\underline{x}_1 - L_1D_1C_2\underline{x}_2 + L_1D_1\underline{r}$$

$x_1' = A_1x_1 + B_1(r - C_2x_2 - D_2(L_1C_1x_1 - L_1D_1C_2x_2 + L_1D_1r)) \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1' = (A_1 - B_1D_2L_1C_1)x_1 + (B_1D_2L_1C_2 - B_1C_2)\underline{x_2} + B_1(I - D_2L_1D_1)\underline{r}$

$x_2' = A_2x_2 + B_2L_1C_1x_1 - B_2L_1D_1C_2\underline{x_2} + B_2L_1D_1\underline{r} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_2' = B_2L_1C_1x_1 + (A_2 - B_2L_1D_1C_2)x_2 + B_2L_1D_1r$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} A_1 - B_1D_2L_1C_1 & B_1(D_2L_1D_1 - I)C_2 \\ B_2L_1C_1 & A_2 - B_2L_1D_1C_2 \end{pmatrix}}^{A_c} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \overbrace{\begin{pmatrix} B_1(I - D_2L_1D_1) \\ B_2L_1D_1 \end{pmatrix}}^{B_c} r$$

$$y = \overbrace{\begin{pmatrix} L_1C_1 & -L_1D_1C_2 \end{pmatrix}}^{C_c} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \overbrace{(L_1D_1)}^{D_c} r$$

Ειδική περίπτωση $\Sigma_{\hat{G}_1}$ και $\Sigma_{\hat{G}_2}$ αυστηρά κανονικά $(D_1 = 0, D_2 = 0 \Rightarrow L_1 = I)$

τότε:

$$\left.\begin{aligned} \begin{pmatrix} \underline{x_1'} \\ \underline{x_2'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 & -B_1C_2 \\ B_2C_1 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{x_1} \\ \underline{x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1 \\ 0 \end{pmatrix} \underline{r} \\ \underline{y} &= \begin{pmatrix} C_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \underline{x_2} \end{pmatrix} + (0)\,\underline{r} \end{aligned}\right\}$$

Εισαγωγή στην ευστάθεια γραμμικών συστημάτων

Έστω σύστημα $\underline{x}' = \underline{f}(\underline{x})$. Έστω $\underline{0}$ είναι σημείο ισορροπίας: $f(\underline{0}) = \underline{0}$

Ορισμός: Το σημείο ισορροπίας $\underline{0}$ είναι ευσταθές κατά Lyapunov αν $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \ \|\underbrace{x_0}_{x(0) = x_0}\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon\ \ \forall\, t > 0$

Ορισμός: Το σημείο ισορροπίας $\underline{0}$ είναι ευσταθές ασυμπτωτικά αν:

(i) ευσταθές κατά Lyapunov

(ii) Αν $\exists\ n > 0 : \|x_0\| < n \Rightarrow \lim_{t \to \infty} \|x(t)\| = \underline{0}$

Στη περίπτωση που το σύστημα είναι γραμμικό και χρονικά ανεξάρτητο, δηλαδή $\underline{x}' = A\underline{x}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ισχύει το παρακάτω θεώρημα

Ε12. Θεωρία Ελέγχου 25/10/2018

Θεώρημα: (i) $\underline{x}' = A\underline{x}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν $\forall \lambda \in \sigma(A)$ ισχύει ότι $Re(\lambda) < 0$

(ii) $\underline{x}' = A\underline{x}$ είναι ευσταθές κατά Lyapunov αν και μόνο αν:

(1) $\forall \lambda \in \sigma(A)$ ισχύει ότι $Re(\lambda) \le 0$

(2) Αν $\forall \lambda \in \sigma(A)$ με $Re(\lambda) = 0$, έχω ότι $\tau = d$

Για γραμμικά συστήματα $\underline{x}' = A\underline{x}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν $\|x(t)\| \to 0 \ \forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}$ ή ισοδύναμα αν και μόνο αν $\|e^{At}\underline{x}_0\| \to 0 \ \forall \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

"Απόδειξη" Έστω ότι $A = UJU^{-1}$, τότε $e^{At}\underline{x}_0 = e^{Jt}\underbrace{U^{-1}\underline{x}_0}_{\underline{\xi}_0} = \underbrace{U^{-1}\underline{x}(t)}_{\xi(t)}$

Το σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνο αν το σύστημα $\underline{\xi}' = J\underline{\xi}$ είναι ασυμπτωτικά ευσταθές, δηλαδή αν και μόνο αν

$\xi(t) = e^{Jt}\underline{\xi}_0 \to 0 \ \forall \xi_0 \in \mathbb{R}^n \iff \forall i = 1, 2, \dots, p : p(t) \cdot e^{\lambda t} \to 0$ καθώς $t \to \infty$

$\iff Re(\lambda_i) < 0$

Συναρτήσεις συχνοτήτων

Έστω σύστημα $\Sigma(A, B, C, D)$ έστω ασυμπτωτικά ευσταθές

δηλαδή $\sigma(A) \subseteq \mathbb{C}_- = \{z \in \mathbb{C} : Re(z) < 0\}$

Η συνάρτηση μεταφοράς είναι $\hat{G}(s) = D + C(sI - A)^{-1}B$

Έστω $u(t) = e^{\lambda t}u_0$, $\lambda = i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, τότε:

$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} B e^{\lambda\tau} \underline{u}_0 \, d\tau = e^{At}\underline{x}_0 + e^{At}\left(\int_0^t e^{(\lambda I - A)\tau} d\tau\right) \cdot B \underline{u}_0 =$$

$$= e^{At}\underline{x}_0 + e^{At}\left[(\lambda I - A)^{-1} e^{(\lambda I - A)\tau}\right]_0^t B \underline{u}_0 \qquad i\omega \notin \sigma(A)$$

$$= e^{At}\underline{x}_0 + e^{At}\left\{(\lambda I - A)^{-1} e^{(\lambda I - A)t} - (\lambda I - A)^{-1}\right\} B u_0$$

$$= e^{At}x_0 + e^{\lambda t}(\lambda I - A)^{-1} B \underline{u}_0 - e^{At}(\lambda I - A)^{-1} \cdot B u_0$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At}\underbrace{(x_0 - (i\omega I - A)^{-1}) B u_0}_{\xi} + (i\omega I - A)^{-1} B u(t)$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{At} \xi + (i\omega I - A)^{-1} B \cdot u(t), \quad e^{At}\xi \to 0 \text{ καθώς } t \to \infty$$

$$\Rightarrow y(t) = C\cdot x(t) + Du(t) = Ce^{At}\xi + [C(i\omega I - A)^{-1}B + D]u(t) = \underbrace{Ce^{At}\xi}_{y_{tr}\to 0} + \hat{G}(i\omega)u(t)$$

$$\underline{y}(t) - \underline{y}_{tr}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{G}_{11}(i\omega) & \dots & \hat{G}_{1m}(i\omega) \\ \vdots & & \\ \hat{G}_{p1}(i\omega) & \dots & \hat{G}_{pm}(i\omega) \end{bmatrix}}_{\text{συνάρτηση συχνοτήτων}} \overbrace{\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}}_{\underline{u}_0} \cdot e^{i\omega t}}^{\underline{u}(t)}$$

Έστω $\underline{u}_0 = [0 \dots 0\ \underset{j\ \text{στήλη}}{1}\ 0 \dots 0]^T \implies \underline{y}(t) - \underline{y}_{tr}(t) = \begin{bmatrix} \hat{G}_{1j}(i\omega) \\ \vdots \\ \hat{G}_{pj}(i\omega) \end{bmatrix} e^{i\omega t}$

$$y_k(t) - y_k^{tr}(t) = G_{kj}(i\omega)e^{i\omega t} = |G_{kj}(i\omega)|\, e^{i\varphi_{kj}(\omega)} e^{i\omega t} = |G_{kj}(i\omega)|\, e^{i(\omega t - \varphi_{kj}(\omega))}$$

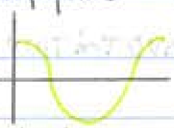
Εφόσον $y_k^{tr}\to 0$ η κ-έξοδος $y_k(t)$ προσεγγίζει τη συνάρτηση
$|G_{kj}(i\omega)|e^{i(\omega t+\varphi_{kj}(\omega))}$ δηλαδή είναι ημίτονο εισης με συχνότητα ω, πλάτος ταλάντωσης $|G_{kj}(\omega)|$ και διαφορά φάσης $\varphi_{kj}(\omega)$

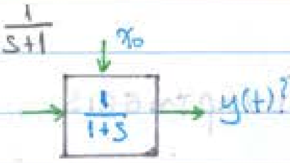
Ο πίνακας $G(i\omega)\in\mathbb{C}^{p\times m}$ λέγεται πίνακας συχνοτήτων.

Τα γραφήματα των συναρτήσεων συνήθως παριστάνονται με λογαριθμική κλίμακα

Διαγράμματα Bode

Παράδειγμα: Έστω σύστημα με συνάρτηση μεταφοράς $\hat{G}(s) = \frac{1}{s+1}$
(δηλαδή $x' = -x+u$, $y = x$) Έστω $u(t) = \cos\omega t$, $t\geq 0$





Η συνάρτηση συχνοτήτων $\hat{G}(i\omega) = \frac{1}{1+i\omega} = |\hat{G}(i\omega)|\, e^{i\cdot\varphi(\omega)}$

όπου $|\hat{G}(i\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$ και $\varphi(\omega) = -\tan^{-1}(\omega)$

Επομένως $y(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}\cos(\omega t - \tan^{-1}(\omega)) + \xi(t)$, όπου $\xi(t)\to 0$ καθώς $t\to\infty$