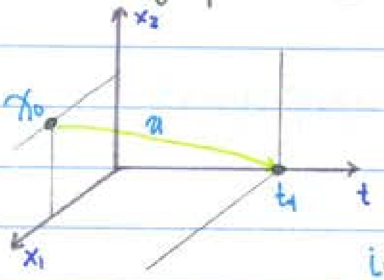
Μάθημα 7ο   Ε12. Θεωρία Ελέγχου   1/11/2018

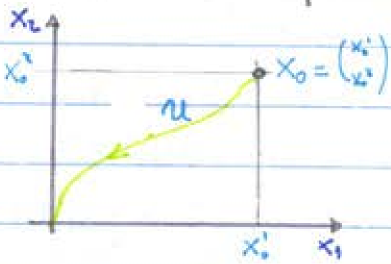
Ελεγξιμότητα

Έστω το σύστημα $\Sigma(A,B)$: $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $\underline{x}(0) = \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$

Ορισμός: Η κατάσταση x_0 λέγεται ελέγξιμη αν $\exists\ \underline{u}(t) \in C([0,t_1],\mathbb{R}^m)$, $t_1 \in [0,\infty)$ που να μεταφέρει την κατάσταση του συστήματος στο $\underline{0}$ σε (πεπερασμένο) χρόνο t_1

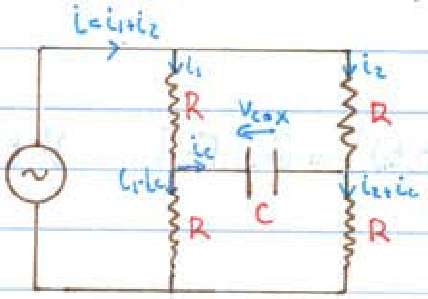
Αν x_0 ελέγξιμη $\forall\ \underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ τότε το $\Sigma(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο





Επίπεδο φάσης

Παράδειγμα:



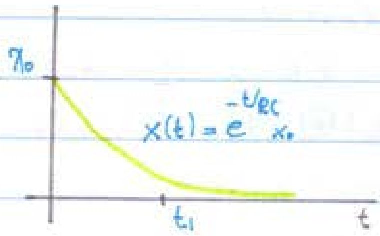
Έστω ότι $V_c(0) = \underline{x}(0) = 0$

Τότε $x(t) = 0\ \forall\ t>0$ ανεξάρτητα του $u(t)$

$$i_1 R + V_c = i_2 R \Rightarrow V_c(t) = x(t) = (i_2 - i_1)R$$

$$C\frac{dV_c}{dt} = i_c \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{C} i_c \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{C}\left(-\frac{x}{R}\right) \Rightarrow x' + \frac{1}{RC}x = 0$$

$$i_1 R + (i_1 - i_c)R = i_2 R + (i_2 + i_c)R \Leftrightarrow i_1 - i_2 = i_c$$



Άρα από αυτά προκύπτει $x(t) = e^{-t/RC} x_0$

Άρα για $x_0 \neq 0$ η λύση είναι ασυμπτωτική στο

Άρα $\forall\ t_1 \in (0,\infty)$ πεπερασμένο $x(t_1) \neq 0$

Άρα δεν είναι ελέγξιμη για οποιαδήποτε μη μηδενική κατάσταση

Έστω ότι $\underline{x}_0$ είναι ελέγξιμη. Επομένως $\exists\ t_1 \geq 0$ και $\underline{u}(t) \in C([0,t_1],\mathbb{R}^m)$ τέτοια ώστε $\underline{x}(t_1) = 0 = e^{At_1}\underline{x}_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B\underline{u}(\tau)\,d\tau$ (πολλαπλασιάζω με $(e^{At_1})^{-1}$)

$$\Rightarrow -\underline{x}_0 = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B u(\tau)\,d\tau$$

Ορίζουμε τον τελεστή $L_c(0,t_1) : C([0,t_1],\mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $L_c(u) = \int_0^t e^{-A\tau} B\, u(\tau) d\tau$

Ο $L_c(\underline{u})$ είναι γραμμικός τελεστής, δηλαδή $\forall\, \underline{u}_1, \underline{u}_2 \in C([0,t_1],\mathbb{R}^m)$ $\forall\, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$L_c(c_1\underline{u}_1 + c_2\underline{u}_2) = c_1 L_c(\underline{u}_1) + c_2 L_c(\underline{u}_2)$

Το σύνολο των ελέγξιμων διανυσμάτων κατάστασης.

$\mathcal{X}_c = \{\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n : x_0 \in \mathcal{R}(L_c(0,t_1))$ για κάποιο $t_1 \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ (υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$)

($\mathcal{R}(A)$ = η εικόνα του A)

Ορίζω τον πίνακα Gramian του $\Sigma(A,B)$

$$W_c(0,t_1) = \int_0^{t_1} \underbrace{e^{-A\tau} B}_{\Phi(\tau)} \underbrace{B^T e^{-A^T\tau}}_{\Phi^T(\tau)} d\tau \qquad (t_1 > 0)$$

$= \int_0^t \Phi(\tau)\Phi^T(\tau)\, d\tau \geq 0$ Είναι τουλάχιστον θετικά ημιορισμένος.

$W_c(0,t_1) = W_c^T(0,t_1) \geq 0 \quad \forall\, t_1 \geq 0$

Ορίζουμε επίσης πίνακα ελεγξιμότητας

$\Gamma_c = [B \vdots AB \vdots A^2B \vdots \dots \vdots A^{n-1}B] \in \mathbb{R}^{n\times nm}$

Θεώρημα: $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}[L_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[W_c(0,t_1)] = \mathcal{R}[\Gamma_c] \quad \forall\, t_1 \in (0,\infty)$

Απόδειξη:

(i) $\mathcal{R}[L_c] = \mathcal{R}[W_c]$

Έστω $x_0 \in \mathcal{R}[L_c] \Rightarrow \exists\, u \in C([0,t_1],\mathbb{R}^m) : \underline{x}_0 = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau$

Έστω ότι $\underline{u}_\xi(\tau) = B^T e^{-A^T\tau} \underline{\xi}$, $0 \leq \tau \leq t_1$, $\xi \in \mathbb{R}^n$

Τότε $\underline{x}_0 = \left(\int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} d\tau\right)\xi = W_c(0,t_1)\underline{\xi}$. Επομένως αφού $\underline{\xi}$ αυθαίρετο

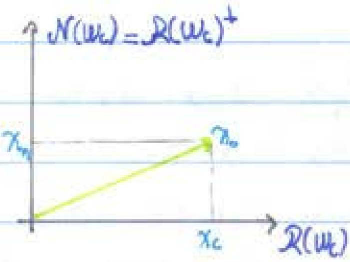
$\mathcal{R}(W_c) \subseteq \mathcal{R}(L_c)$

Αντίστροφα Έστω $\underline{x}_0 \in \mathcal{R}(L_c)$ Εφόσον $W_c = W_c^T$ έχουμε

$\mathbb{R}^n = \mathcal{R}(W_c) \oplus \mathcal{N}(W_c)$ και $\mathcal{N}(W_c) = \mathcal{R}(W_c)^\perp$

Επομένως το $\underline{x}_0$ γράφεται μονοσήμαντα

$\underline{x}_0 = \underline{x}_c + \underline{x}_n$, $x_n \in \mathcal{N}(W_c) = \mathcal{R}^\perp(W_c) \Rightarrow \underline{x}_c^T \underline{x}_n = 0$



$\underline{x}_n \in \mathcal{N}(W_c) \Rightarrow W_c \underline{x}_n = 0 \Rightarrow \underline{x}_n^T W_c \underline{x}_n = 0 \Rightarrow \int_0^{t_1} (\underbrace{\underline{x}_n^T e^{-A\tau} B}_{\xi^T}\ \underbrace{B^T e^{-A^T\tau} \underline{x}_n}_{\xi}) d\tau = 0$

$\int_0^{t_1} \| x_n^T e^{-A\tau} B \|^2 d\tau = 0 \Rightarrow x_n^T e^{-A\tau} B = 0 \quad \forall\, \tau \in [0,t_1]$

$\|\underline{x}_n\|^2 = \underline{x}_n^T \underline{x}_n = \underbrace{(x_c^T + x_n^T)}_{x_0^T} x_n = \underline{x}_0^T \underline{x}_n$

Ε12. Θεωρία Ελέγχου 1/11/2018

Αλλά $\underline{x}_0 = \int_0^{t} e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau \Rightarrow \underline{x}_m^T \underline{x}_0 = \int_0^{t_1} \underbrace{x_m^T e^{-A\tau} B}_{0} \cdot u(\tau) d\tau$

$\Rightarrow \underline{x}_m^T \underline{x}_0 = 0 \Rightarrow \|\underline{x}_m\| = 0 \Rightarrow \underline{x}_m = 0$ $\quad \underline{x}_0 = \underline{x}_c + \underline{x}_m$

$x_c \in \mathcal{R}(W_c)$, $\underline{x}_m \in \mathcal{N}(W_c) = \mathcal{R}^{\perp}(W_c)$

$\Rightarrow x_c^T \underline{x}_m = 0 \Rightarrow \mathcal{R}(L_c) \subseteq \mathcal{R}(W_c)$ επομένως $\mathcal{R}(W_c) = \mathcal{R}(L_c)\ \forall t \in (0,\infty)$

(ii) $\forall t_1 \in (0,\infty) : \mathcal{R}(W_c) = \mathcal{R}(\Gamma_c)$

Αρχικά θα δείξουμε ότι $\mathcal{R}(W_c) \subset \mathcal{R}(\Gamma_c)$

Έστω $\underline{x}_0 \in \mathcal{R}(W_c) \Leftrightarrow \underline{x}_0 \in \mathcal{R}(L_c) \Rightarrow \exists\, u \in C([0,t_1],\mathbb{R}^n)$

$\underline{x}_0 = \int_0^{t_1} e^{-A\tau} B \underline{u}(\tau) d\tau$ (*)

Από το θεώρημα Cayley-Hamilton

ο όρος $e^{-A\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-A)^k \tau^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-A)^k \tau^k}{k!} + \cancelto{0}{\sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-A)^k \tau^k}{k!}} = \sum_{k=0}^{m-1} b_k(\tau) A^k$

Άρα (*) $= \int_0^{t_1} \sum_{k=0}^{m-1} b_k(\tau) A^k \cdot B \underline{u}(\tau) d\tau \Rightarrow \underline{x}_0 = \sum_{k=0}^{m-1} A^k B \underbrace{\int_0^{t_1} b_k(\tau) u(\tau)}_{\alpha_k(t_1) = \alpha_k} d\tau$

$= \underbrace{[B \mid AB \mid \dots \mid A^{m-1}B]}_{\Gamma_c} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{m-1} \end{bmatrix}}_{\alpha \in \mathbb{R}^{n \times m}} \Rightarrow \underline{x}_0 \in \mathcal{R}(\Gamma_c) \Rightarrow \mathcal{R}(W_c) \subseteq \mathcal{R}(\Gamma_c)$

Αντίστροφα, έστω $\underline{x}_0 \in \mathcal{R}(\Gamma_c)$. δηλαδή $\underline{x}_0 = \Gamma_c \cdot \underline{y}$, $y \in \mathbb{R}^{m \cdot m}$ και έστω (για αντίφαση) ότι $\underline{x}_0 \notin \mathcal{R}(W_c)$. Τότε $\underline{x}_0 = \underline{x}_c + \underline{x}_m$, $\underline{x}_c \in \mathcal{R}(W_c)$, $\underline{x}_m \in \mathcal{N}(W_c) = \mathcal{R}^{\perp}(W_c)$

$\underline{x}_c^T \cdot \underline{x}_m = \underline{0}$, $x_m \neq 0$ τότε $x_m \in \mathcal{N}(W_c) \Rightarrow \underline{x}_m^T W_c \underline{x}_m = 0 = \int_0^{t_1} \underbrace{x_m^T e^{-A\tau} B}_{\xi^T} \underbrace{B^T e^{-A^T\tau} x_m}_{\xi} d\tau$

$\Rightarrow x_m^T e^{-A\tau} \cdot B = 0 \quad \forall \tau \in [0,t_1]$

Επομένως για $\tau = 0 \Rightarrow x_m^T \cdot B = 0$

$(x_m^T e^{-A\tau} \cdot B)'\big|_{\tau=0} = -x_m^T e^{-A\tau} B\big|_{\tau=0} \Rightarrow x_m^T AB = 0$ και γενικά

$x_m^T A^k \cdot B = 0 \quad \forall k = 0,1,2,\dots \Rightarrow x_m^T [B \mid AB \mid \dots \mid A^{m-1}B] = 0 \Rightarrow \underline{x}_m^T \Gamma_c = 0$

Επομένως $\|\underline{x}_m\|^2 = \underline{x}_m^T \underline{x}_m = (x_c^T + x_m^T) x_m = x_0^T x_m = \underline{x}_m^T x_0 = x_m^T \Gamma_c y = 0 \Rightarrow \underline{x}_m = 0$. Άτοπο

Αν $\mathcal{X}_c = \mathbb{R}^n$ πλήρως ελέγξιμο

Άρα $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο $\Leftrightarrow \operatorname{rank}[L_c] = \operatorname{rank}[W_c] = \operatorname{rank}[\Gamma_c] = n$

• $\operatorname{rank}[W_c] \rightsquigarrow \operatorname{rank}\left|\int_0^{t_1} e^{-A\tau} B B^T e^{-A^T\tau} d\tau\right| = n \Leftrightarrow W_c = W_c^T > 0$ (θετικά ορισμένος)

• $rank[\Gamma_c] \rightarrow rank\overbrace{[B|AB|\dots|A^{n-1}B]}^{nm} = n \Longrightarrow$ Γενικά οι γραμμές του Γ_c είναι γραμμικά ανεξάρτητες και αν $m=1 \Longrightarrow det[\Gamma_c] \neq 0$

Το βασικό αποτέλεσμα που έχουμε από το Θεώρημα:
$\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο $\Longleftrightarrow$ Οι γραμμές του Γ_c είναι γραμμικά ανεξάρτητες

Θεώρημα: $\mathcal{X}_c = \mathcal{R}[\Gamma_c]$ είναι ο μικρότερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει το $\mathcal{R}(B)$

Απόδειξη:

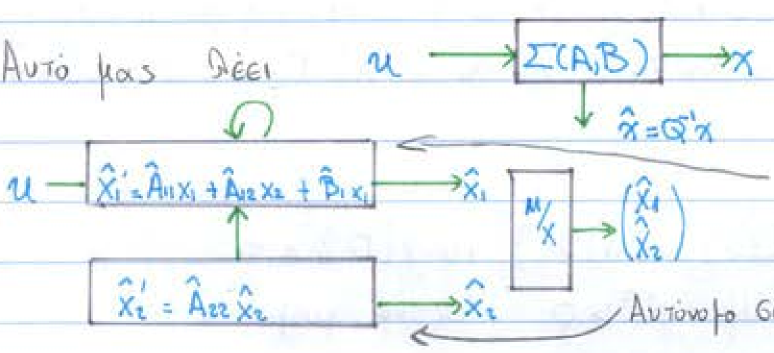
Αν $\underline{x} \in \mathcal{X}_c$ τότε $\underline{x} = \overbrace{[B|AB|\dots|A^{n-1}B]}^{\Gamma_c}\,\underline{y}$, τότε $A\underline{x} = A\Gamma_c\underline{y} = [AB|A^2B|\dots|A^nB]\,\underline{y}$
κάθε ένα από τα $(n-1)$ πρώτα block είναι γραμμικός συνδυασμός από στήλες του Γ_c και το A^nB από το Θεώρημα Cayley-Hamilton μπορεί να γραφτεί σαν γραμμικός συνδυασμός. Άρα το $A\underline{x}$ είναι γραμμικός συνδυασμός στηλών του $\Gamma_c \Longrightarrow A\underline{x} \in \mathcal{X}_c$
Οπότε $\mathcal{X}_c$ A-αναλλοίωτος και προφανώς περιέχει το $\mathcal{R}(B)$
Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^n : AV \subseteq V$, $\mathcal{R}(B) \subseteq V$
$\mathcal{R}(B) \subseteq V \Longrightarrow \mathcal{R}(AB) \subseteq V \Longrightarrow \mathcal{R}(AAB) = \mathcal{R}(A^2B) \subseteq V$
$\Longrightarrow \dots \quad \mathcal{R}(A^{n-1}B) \subseteq V \Longrightarrow \Gamma_c \subseteq V \Longrightarrow \mathcal{X}_c \subseteq V$
Επομένως ο $\mathcal{X}_c$ είναι ο μικρότερος A-αναλλοίωτος υπόχωρος που περιέχει το $\mathcal{R}(B)$

Λήμμα: Έστω $\Sigma(A,B)$ $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, που δεν είναι πλήρως ελέγξιμο
(Επομένως $rank(\Gamma_c) = n_c < n$) τότε $\exists\ Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $det(Q) \neq 0$:
$Q^{-1}AQ = \hat{A}$, $Q^{-1}B = \hat{B}$ όπου

$$\hat{A} = \begin{array}{cc} n_c & n-n_c \\ \end{array}\left[\begin{array}{cc} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{array}\right]\}n_c, \quad \hat{B} = \left[\begin{array}{c} \hat{B}_1 \\ 0 \end{array}\right]\}n_c \quad \text{με } \hat{A}_{11} \in \mathbb{R}^{n_c\times n_c},\ \hat{B}_1 \in \mathbb{R}^{n_c\times m}$$

και $\Sigma(\hat{A}_{11},\hat{B}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο

Αυτό μας λέει



$$\hat{x}_1' = \hat{A}_{11}\hat{x}_1 + \hat{A}_{12}\hat{x}_2 + \hat{B}_1 u$$
$$\hat{x}_2' = \hat{A}_{22}\hat{x}_2$$

Πλήρες ελέγξιμο σύστημα

Αυτόνομο σύστημα που λύνεται εύκολα $\hat{x}_2 = e^{\hat{A}_{22}t}\hat{x}_2(0)$