Μάθημα 8ο Ε12. Θεωρία Ελέγχου 6/11/2018

Λήμμα: (Kalman)

Έστω $\Sigma(A,B)$: $\underline{x}' = A\underline{x} + B\underline{u}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ μη-πλήρως ελέγξιμο και $\operatorname{rank}(\Gamma_c) = n_c < n$. Τότε $\exists\, Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\det(Q) \neq 0$:

$$\hat{A} = Q^{-1} A Q = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

και το $\Sigma(\hat{A}_{11}, \hat{B}_{11})$ είναι πλήρως ελέγξιμο.

Απόδειξη:

Έστω $\{\underline{v}_i\}_{i=1}^{n_c}$ βάση του $\mathcal{R}(\Gamma_c)$ και $Q_1 = [\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{n_c}]$ και $Q_2 : Q = [Q_1, Q_2] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ και $\det(Q) \neq 0$. Ορίζουμε $\hat{A} = Q^{-1}AQ$ και $\hat{B} = Q^{-1}B$.

Τότε ισοδύναμα $Q\hat{A} = AQ$ και $Q\hat{B} = B$

$$[\underbrace{\underline{v}_1\, \underline{v}_2 \dots \underline{v}_{n_c}}_{Q_1} \,\vdots\, Q_2] \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} \end{bmatrix} = A \cdot [\underbrace{\underline{v}_1\ \underline{v}_2 \dots \underline{v}_{n_c}}_{Q_1} \,\vdots\, Q_2]$$

και $$[\underbrace{\underline{v}_1\, \underline{v}_2 \dots \underline{v}_{n_c}}_{Q_1} \,\vdots\, Q_2] \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = B$$

Θα δείξω ότι $\hat{A}_{21} = 0$, $\hat{B}_2 = 0$

Ξέρω ότι $A\underline{v}_i \in \mathcal{X}_c$ $\forall i = 1, 2, \dots, n_c$ αφού $\mathcal{X}_c$ A-αναλλοίωτος.

$A\underline{v}_i = \sum_{i=1}^{n_c} \gamma_i \underline{v}_i \Rightarrow \hat{A}_{21} = 0$

Εφόσον $\mathcal{R}(B) \subseteq \mathcal{X}_c \Rightarrow \hat{B}_2 = 0$

Μένει να δείξω ότι το $\Sigma(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1)$ είναι πλήρως ελέγξιμο

Εξετάζουμε τις ιδιότητες ελεγξιμότητας του συστήματος $\Sigma(\hat{A}, \hat{B})$

$\hat{\Gamma}_c = [\hat{B} \,\vdots\, \hat{A}\hat{B} \,\vdots\, \dots \,\vdots\, \hat{A}^{n-1}\hat{B}]$

$\hat{B} = Q^{-1}B$ και $\hat{A} = Q^{-1}AQ \Rightarrow \hat{A}\hat{B} = Q^{-1}A\overbrace{QQ^{-1}}^{I}B = Q^{-1}AB \Rightarrow \hat{A}^k\hat{B} = Q^{-1}A^kB$

Τότε $\hat{\Gamma}_c = [Q^{-1}B \,\vdots\, Q^{-1}AB \,\vdots\, \dots \,\vdots\, Q^{-1}A^{n-1}B] = Q^{-1}[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{n-1}B] = Q^{-1}\Gamma_c$

$\Rightarrow \operatorname{rank}(\hat{\Gamma}_c) = \operatorname{rank}(\Gamma_c) = n_c < n$ όμως

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{A}\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & \hat{A}_{12} \\ 0 & \hat{A}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11}\hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ και γενικά } \hat{A}^k\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11}^k\hat{B}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα $$\operatorname{rank}(\hat{\Gamma}_c) = \operatorname{rank}\left(\begin{bmatrix} \hat{B}_1 & \hat{A}_{11}\hat{B}_1 & \dots & \hat{A}_{11}^{n-1}\hat{B}_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{rank}([\hat{B}_1 \,\vdots\, \hat{A}_{11}\hat{B}_1 \,\vdots\, \hat{A}_{11}^{n_c-1}\hat{B}_1 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, \hat{A}_{11}^{n-1}\hat{B}_1])$$

$= \operatorname{rank}([\hat{B}_1 \,\vdots\, \dots \,\vdots\, \hat{A}_{11}^{n_c-1}\hat{B}_1]) \Rightarrow \Sigma(\hat{A}_{11}, \hat{B}_1)$ πλήρως ελέγξιμο

Θεώρημα: Έστω $\Sigma(A,B)$ όπου $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $B\in\mathbb{R}^{n\times m}$, τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) $\Sigma(A,B)$ πλήρως ελέγξιμο

(β) $\operatorname{rank}[L_c(0,t_1)]=n \quad \forall\, t_1\in(0,\infty)$

(γ) $\operatorname{rank}[W_c(0,t_1)]=n \quad \forall\, t_1\in(0,\infty)$

(δ) $\operatorname{rank}[\Gamma_c]=n$

(ε) $\operatorname{rank}([sI_n-A \,\vdots\, B])=n \quad \forall\, s\in\mathbb{C} \iff \operatorname{rank}[\lambda_i I_n \,\vdots\, B]=n \quad \forall\, \lambda_i\in\sigma(A)$

Απόδειξη:

Έχουμε ήδη αποδείξει ότι $(\alpha)\iff(\beta)\iff(\gamma)\iff(\delta)$

Θα αποδείξουμε ότι $(\delta)\implies(\varepsilon)$ και $(\varepsilon)\implies(\alpha)$

• $(\delta)\implies(\varepsilon)$

Έστω (για αντίφαση) ότι $\exists\, \lambda\in\sigma(A):\ \operatorname{rank}(\overbrace{[\lambda I_n-A \,\vdots\, B]}^{\in\mathbb{C}^{n\times(n+m)}})<n$

$\implies \exists\, \underline{\xi}\in\mathbb{C}^n,\ \underline{\xi}\neq 0:\ \underline{\xi}^*[\lambda I-A \,\vdots\, B]=\underline{0} \implies \underline{\xi}^*A=\lambda\underline{\xi}^*$ και $\underline{\xi}^*B=0$

Η πρώτη σχέση $\implies \underline{\xi}^*A^2=\lambda\underline{\xi}^*A=\lambda^2\underline{\xi}^* \implies \underline{\xi}^*A^k=\lambda^k\underline{\xi}^* \quad \forall\, k\in\mathbb{N}$

$\implies \xi^*\cdot[B \,\vdots\, AB \,\vdots\, \dots \,\vdots\, A^{n-1}B]=\underline{0}^T \qquad (\underline{\xi}^*B=0,\ \underline{\xi}^*AB=\lambda\underline{\xi}^*B=0,\ \dots)$

$\implies \operatorname{rank}(\Gamma_c)<n$ (αντίφαση) Άρα $(\delta)\implies(\varepsilon)$

• $(\varepsilon)\implies(\alpha)$

Έστω ότι $\Sigma(A,B)$ δεν είναι πλήρως ελέγξιμο. Τότε $\exists\, Q\in\mathbb{R}^{n\times n}:\ \det(Q)\neq 0$:

$$\hat{A}=Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}\hat{A}_{11} & \hat{A}_{12}\\ 0 & \hat{A}_{22}\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Q^{-1}B=\hat{B}=\begin{bmatrix}\hat{B}_{11}\\ 0\end{bmatrix}$$

όπου $\hat{A}_{11}\in\mathbb{R}^{n_c\times n_c}$, $\hat{B}_1\in\mathbb{R}^{n_c\times m}$ και $n_c<n$

Έχουμε $\sigma(A)=\sigma(\hat{A})=\sigma(\hat{A}_{11})\cup\sigma(\hat{A}_{22})$ Έστω $\lambda\in\sigma(\hat{A}_{22})$ και έστω $\underline{\xi}\neq 0:\ \underline{\xi}^*\hat{A}_{22}=\lambda\underline{\xi}^*$. Τότε,

$$[\underline{0}^T \,\vdots\, \underline{\xi}^*]\begin{bmatrix}\lambda I-\hat{A}_{11} & -\hat{A}_{12} & \vdots & \hat{B}_1\\ 0 & \lambda I-\hat{A}_{22} & \vdots & 0\end{bmatrix}=\underline{0}^T$$

Άρα $\exists\, \underline{\beta}\neq 0:\ \beta^*[\lambda I-\hat{A} \,\vdots\, \hat{B}]=\underline{0}^T \implies \underline{\beta}^*[\lambda I-Q^{-1}AQ \,\vdots\, Q^{-1}B]=\underline{0}^T$

$$\implies \underline{\beta}^*Q^{-1}[\lambda I-A \,\vdots\, B]\begin{bmatrix}Q & 0\\ 0 & I\end{bmatrix}=\underline{0}$$

$\implies \exists\, \underline{\gamma}\neq 0:\ \gamma^*[\lambda I-A \,\vdots\, B]=\underline{0}$ Άτοπο

Ε12. Θεωρία Ελέγχου 6/11/2018

Θεώρημα: $\Sigma(A,B)$ είναι πλήρως ελέγξιμο αν κάθε $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ μεταφέρεται σε αυθαίρετη $\underline{x}(t_1) = \underline{x}_1 \in \mathbb{R}^n$ σε πεπερασμένο χρόνο $t_1 \in (0,\infty)$

Απόδειξη:

Θέλουμε να δείξουμε ότι τότε $\underline{x}_1 = e^{At_1} \cdot \underline{x}_0 + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B\, \underline{u}(\tau)\, d\tau$

$\Rightarrow 0 = e^{At_1} (\underbrace{\underline{x}_0 - e^{-At_1}\underline{x}_1}_{\underline{\xi}_0}) + \int_0^{t_1} e^{A(t_1-\tau)} B\, \underline{u}(\tau)\, d\tau$